7.4 もとに戻る行列

ワークシート

問題

STEP II 2020、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

> **考えてみよう**　すべての 2×2 行列は $\mathbf{M}^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\mathbf{M} + (\det\mathbf{M})\mathbf{I} = \mathbf{0}$ を満たす（ケイリー・ハミルトンの定理（Cayley–Hamilton theorem）。展開して計算すれば確かめられる）。このことは、$\mathbf{M}^2$ に関する問いにどう役立つだろうか。

段階 1　2 乗のトレース

扱う内容：小問 (i)

> **考えてみよう**　$\mathbf{M}^2$ を展開し、その対角成分（diagonal entries）を足し合わせよ。$(a+d)^2$ と比べてみよ。

段階 2 $\pm\mathbf{I}$ の平方根

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう $t = a + d$、$d = \det \mathbf{M}$ として、$\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$ に $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ を代入せよ。$t \neq 0$ ならば、$\mathbf{M}$ はどのような行列でなければならないか。

手を止めて、やってみよう $t \neq 0$ ならば $\mathbf{M} = \pm\mathbf{I}$ となるが、これは除外されていることを示せ。したがって $t = 0$ である。このとき $\det \mathbf{M}$ はいくつか。$\mathbf{M}^2 = -\mathbf{I}$ についても同様に考え、逆（converse）の証明も忘れないこと。

段階 3　4 乗根

扱う内容：小問 (iii)

手を止めて、やってみよう　$\mathbf{N} = \mathbf{M}^2$ とおくと、$\mathbf{M}^4 = \mathbf{I}$ は $\mathbf{N}^2 = \mathbf{I}$ を意味する。$\mathbf{N}$ に小問 (ii) を用いよ。$\det \mathbf{N}$ が -1 になりえないのはなぜか。

考えてみよう　$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$ については、$\mathbf{N}$ に小問 (ii) の後半を用い、小問 (i) を使って $\operatorname{tr}\mathbf{N}$ と $\det\mathbf{N}$ を $\operatorname{tr}\mathbf{M}$ と $\det\mathbf{M}$ で表せ。

段階 4 回転でない I の 8 乗根

扱う内容：小問 (iv)

考えてみよう $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$ を満たす行列はどれも $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$ を満たす。トレースと行列式（determinant）が条件に合い、成分が回転（rotation）の行列の成分になっていないものを一つ見つけよ。それが回転でも鏡映（reflection）でもないことは、どのように確かめられるか。

背後にある数学

相似な行列

段階 4 の $\mathbf{M}$ が「姿を変えた回転」であるのはなぜだろうか。二つの行列 $\mathbf{M}$ と $\mathbf{R}$ は、ある正則行列 $\mathbf{S}$ について $\mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{-1}$ となるとき**相似**（similar）であるという。このとき二つの行列は、異なる座標で同じ変換を表している。相似な行列はトレースと行列式が等しく、（$\mathbf{I}$ の定数倍でない 2×2 行列については）その逆も成り立つ。したがって、トレースが $\sqrt{2}$ で行列式が 1 である実行列はすべて 45° の回転と相似であり、$\mathbf{S}$ によって与えられる斜交座標では単に回転するだけである（図 7.4.1（オンライン版の節全体を参照））。一般に、$\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$ を満たす実 2×2 行列は、つねに回転または鏡映と相似である。

結晶に 5 回対称性がない理由

結晶とは、原子が規則正しく繰り返し並んだものである。結晶の回転対称性は原子の格子をそれ自身に移すので、格子に基づく座標では**整数**成分の行列で表される。したがって、そのトレースは整数である。一方、角 θ の回転のトレースはどの座標でも $2\cos\theta$ であり、$2\cos\theta$ が整数となるのはそれが $-2, -1, 0, 1$ または 2 のとき、すなわち位数 2、3、4、6（および 1）の回転の場合に限る。5 回対称性には $2\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ が必要で

あるが、これは整数ではない。これが**結晶学的制限定理**（crystallographic restriction theorem）である。1982 年、ダン・シェヒトマン（Dan Shechtman）は見かけ上 5 回対称性をもつ合金を観測し、当初は嘲笑された。しかしそれは**準結晶**（quasicrystal）であることが判明した。準結晶は、ペンローズ（Penrose）・タイリングのように秩序はあるが周期的ではないため、この定理の対象外なのである。彼は 2011 年にノーベル化学賞を受賞した。

次の一歩

1. **位数 3 の回転。** STEP II 2021、問 7（OCR が配布している 2021 年の過去問一式に収録、www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip）に挑戦せよ。この問題は、珍しい性質をもつ回転行列から始まり、3 乗が単位行列となるすべての実 2×2 行列についての事実で終わる。

2. **位数 6。** $\mathbf{M}^6=\mathbf{I}$ であるが $\mathbf{M}^2\neq\mathbf{I}$ かつ $\mathbf{M}^3\neq\mathbf{I}$ となるための、トレースと行列式に関する条件を求めよ。

3. **結晶学的制限。** $\mathbf{M}$ が整数成分をもち、$\det\mathbf{M}=1$ であり、ある n について $\mathbf{M}^n=\mathbf{I}$ ならば、$\operatorname{tr}\mathbf{M}\in\{-2,-1,0,1,2\}$ であることを示せ。また、位数 6 の整数行列を一つ求めよ。

4. **累乗に対するケイリー・ハミルトンの定理。** $\mathbf{M}^2=t\mathbf{M}-d\mathbf{I}$ を用いて $\mathbf{M}^3$ と $\mathbf{M}^4$ を $p\mathbf{M}+q\mathbf{I}$ の形で表し、これを用いて $\mathbf{M}^4=-\mathbf{I}$ となるための条件を導き直せ。

さらに学ぶために

- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry***（Springer）。『群と対称性』。結晶学的制限と壁紙模様の分類を含む。
- **Marjorie Senechal, *Quasicrystals and Geometry***（Cambridge University Press）。『準結晶と幾何学』。準結晶と非周期的秩序の数学。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。『線形代数入門』。相似な行列とケイリー・ハミルトンの定理。

詳しい解説付きの解答は第 7.4 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/finite-order.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com