7.3 行列式を行列式たらしめるもの

ワークシート

問題

STEP II 2019、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　問題中のそれぞれの特別な行列は何をするか。一般の $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して **JM**、**MJ**、**KM**、**PM** を計算せよ。

段階 1　単位行列

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　$\mathbf{M} = \mathbf{MI}$ と書き、両辺に f を適用せよ。適当な $\mathbf{M}$ を選べば、$\mathrm{f}(\mathbf{M})$ で割ってよい。

段階 2 入れ替え

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう $\mathbf{J}^2$ を計算せよ。そこから $\mathrm{f}(\mathbf{J})^2$ について何がわかるか。二つの候補となる値のうち、どちらが除外されるか。

手を止めて、やってみよう 与えられた二つの行列（matrix）を、それぞれ $\mathbf{J}$、$\mathbf{M}$、$\mathbf{J}$ を適当な順に並べた積（product）として表せ。そのうえで f を適用せよ。

段階 3　従属な行

扱う内容：小問 (iii)

手を止めて、やってみよう　まず、二つの行（row）が等しい行列 $\mathbf{B}$ を考えよ。$\mathbf{JB}$ は何か。f を適用し、小問 (ii) を用いよ。次に、$\mathbf{B}$ に $\mathbf{K}$ を掛けることで、第 2 行が第 1 行の k 倍である行列を得よ。

段階 4 剪断

扱う内容：小問 (iv)

考えてみよう $\mathbf{P}^2$ と $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}$ を計算せよ。どのような k に対してこれらは等しくなるか。

手を止めて、やってみよう その等式の両辺に f を適用せよ。$\mathrm{f}(\mathbf{P})$ についての方程式が得られ、その解は二つある。$\mathrm{f}(\mathbf{P})$ が 0 になりえないのはなぜか。$\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}$ を用いよ。

背後にある数学

乗法的な関数はすべて行列式の関数である

問題は $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 1$ で終わっているが、議論は完結させることができる。すべての可逆行列は基本行列（行の入れ替え、行のスカラー倍、剪断）の積であり、この問題はそれぞれの上で f がどう振る舞うかを示している。このことから、ある一変数実関数 ϕ で $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ を満たすものを用いて $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \phi(\det \mathbf{M})$ と書けることが従う。行列式そのものは $\phi(x) = x$ の場合であるが、$\phi(x) = x^3$ や $\phi(x) = |x|^{1/2}\operatorname{sign}(x)$ でも

よい。言い換えれば、**行列式は行列上の乗法的（*multiplicative*）な関数として本質的に新しい唯一のものである**。群論（group theory）の言葉でいえば、行列式は、可逆行列の群について可換群（commutative group）から見えるすべてを捉えている。

面積としての行列式

幾何学的には、2×2 行列は単位正方形を平行四辺形（parallelogram）に移し、$\det \mathbf{M}$ はその**符号付き面積**（signed area）である。向き（orientation）が保たれれば正、反転すれば負となる（図 7.3.1）。すると乗法的な性質には明白な意味がある：二つの変換を続けて行うと、それぞれの面積の拡大率が掛け合わされるのである。行の入れ替えは向きを反転させるので $\det \mathbf{J} = -1$ となる。剪断は正方形をずらして同じ面積の平行四辺形にするので $\det \mathbf{P} = 1$ となる。そして従属な行をもつ行列は正方形を平たく押しつぶすので、その行列式は 0 となる。問題のどの段階にも、対応する図がある。



図 7.3.1　符号付き面積としての行列式。二つの基底ベクトル（basis vectors）の像（琥珀色、紫色）が平行四辺形を張る。剪断は面積を保ち、基底ベクトルの入れ替えは向きを反転させ、従属な行（または列）は正方形を一本の直線上につぶす。二つの変換を続けて行うと符号付き面積が掛け合わされる。これが性質 $\mathrm{f}(\mathbf{MN}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\mathrm{f}(\mathbf{N})$ である。

高次元の行列式

$n \times n$ 行列に対して、行列式は符号付き体積の拡大率であり、次の三つの性質によって特徴づけられる：各行について線形であること、二つの行を入れ替えると符号が変わること、単位行列上で 1 に等しいこと。これらだけからおなじみの展開公式を導くことができ、ガウスの消去法はそれを効率よく計算する方法を与える。行列式は、重積分（multiple integrals）の変数変換（change of variables）の公式（**ヤコビアン**（Jacobian））、逆行列の公式、そして Section 5.4 で見たように多項式の判別式（discriminant）に現れる。

次の一歩

1 **他の例。** $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = (\det \mathbf{M})^3$ が問題のすべての条件を満たすこと、および $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = |\det \mathbf{M}|$ は乗法的な性質を満たすが $\mathrm{f}(\mathbf{J}) \neq 1$ は満たさないことを示せ。

2 **列変形。** 第 2 列が第 1 列の定数倍であるような任意の行列上でも f が 0 となることを示せ。

3 **スカラー倍。** $\mathbf{K}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ とする。$\mathrm{f}\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{f}(\mathbf{K}_k)$ であること、および $\mathrm{f}(\mathbf{K}_k)\mathrm{f}(\mathbf{K}_l) = \mathrm{f}(\mathbf{K}_{kl})$ であることを示せ。

4 **行列式への帰着。** やや難 すべての可逆な 2×2 行列が、$\mathbf{J}$、$\mathbf{K}_k$、$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の形の行列の積として書けることを示せ。これより、$\mathrm{f}(\mathbf{M})$ は $\det \mathbf{M}$ のみに依存することを導け。

さらに学ぶために

- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right***（Springer、オンラインで無料公開）。この問題と同じ精神で、行列式をその性質から定義している。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。第 5 章で、三つの規則から行列式を展開している。
- **3Blue1Brown「The determinant」**（動画、オンラインで無料公開）。面積による解釈を、美しいアニメーションで示している。

詳しい解説付きの解答は第 7.3 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/determinant-axioms.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com