7.2 向きを変えずに伸ばす

ワークシート

問題

STEP III 1990、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s3-q6

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　T があるベクトルを「向きは変えずにスカラー倍する」とはどういうことか。式で書いてみよ。

段階 1　固有ベクトル

扱う内容：向きが変わらない 2 つのベクトル

? **考えてみよう**　行列を $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ にそれぞれ作用させてみよ。得られた結果は、それぞれもとのベクトルの定数倍になっているだろうか。何倍になっているだろうか。

段階 2 円の像

扱う内容：E の方程式とその面積

考えてみよう 逆行列（inverse matrix）を求め、x と y を X と Y で表せ。それを $x^2 + y^2 = 1$ に代入して整理せよ。

手を止めて、やってみよう 面積について：線形写像（linear map）はあらゆる面積を、その行列式（determinant）の絶対値倍にする。C の内部の面積はいくらか。答えは、最初の段階で求めた 2 つの拡大率を使って確かめることができる。

段階 3　X の最大値

扱う内容：E 上での X の最大値

考えてみよう　X を C 上の点 (x, y) を用いて表せ。$x^2 + y^2 = 1$ のとき、$9x - 2y$ はどこまで大きくなりうるか。単位ベクトルとの内積（dot product）とみなして考えよ。

段階 4 接線

扱う内容：E の接線

> **手を止めて、やってみよう** 点 $\frac{1}{5}(3,4)$ における C の接線（tangent）は $3x+4y=5$ である。線形写像は接線を接線に移すので、x と y を X と Y で表した式をこの直線の方程式に代入せよ。

背後にある数学

スペクトル定理

実対称行列はすべて、互いに直交する固有ベクトルを必要なだけそろえて持ち、その固有値は実数である。これが**スペクトル定理**（spectral theorem）であり、線形代数の最初の講義における中心的な結果の一つである。この定理は、対称な線形写像（linear map）はどれも、適切な直交座標で見れば各軸に沿った伸縮にすぎないことを述べている。同じことだが、$8X^2+12XY+17Y^2$ のような二次形式（quadratic form）はどれも、回転によって $\lambda_1 u^2+\lambda_2 v^2$ の形に直すことができる。中心をもつ二次曲線がすべて、直交する軸をもつ楕円か双曲線（hyperbola）になるのはこのためである（**主軸定理**（principal axis theorem））。この考え方は 1820 年代のコーシー（Cauchy）にさかのぼる。コーシーはこれを用いて、二次曲面の主軸や固体内部の応力の主軸を求めた。

この定理を成り立たせているのは対称性である。対称でない行列はそれほど素直ではない。90° の回転はすべての方向を回してしまうので実の固有ベクトルを一つも持たず、せん断（shear）$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ は固有ベクトルの方向を一つしか持たないので、どのような 2 本の軸に沿った伸縮にもならない。

いたるところに現れる固有ベクトル

固有ベクトルが現れる場面をいくつか挙げておく。

- **振動。**質点とばねからなる系は**基準振動**（normal mode）で振動する。これは、すべての部分が単一の振動数でそろって動く振動のパターンである。基準振動はある行列の固有ベクトルであり、振動数は固有値から得られる（Section 11.2）。
- **データ。**データ点の集まりが最も大きく広がっている方向は、その共分散行列（covariance matrix）の固有ベクトルである。それを求めることが**主成分分析**（principal component analysis）であり、統計学や機械学習の基本的な道具の一つである（Section 13.7）。
- **量子力学。**ある量を測定したときに得られうる結果は行列（または作用素）の固有値であり、原子のエネルギー準位も固有値である。
- **ウェブ検索。**検索エンジン Google のもとになったアイデアである PageRank は、ページ間のリンクを表す巨大な行列の、固有値 1 に対する固有ベクトルの成分によってページを順位づける。

次の一歩

1 **固有値を求める。** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$ の解であることを示し、問題の行列について $\lambda = 2$ と 4 が得られることを確かめよ。

2 **直交する固有ベクトル。** $\mathbf{M}$ が対称で、$\lambda \neq \mu$ として $\mathbf{Mu} = \lambda\mathbf{u}$、$\mathbf{Mv} = \mu\mathbf{v}$ ならば、$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ であることを示せ。（**ヒント：**$\mathbf{v} \cdot \mathbf{Mu}$ を 2 通りに計算せよ。）

3 **回転。**回転行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は、θ が π の整数倍でない限り実の固有ベクトルを持たないことを示せ。その複素固有値は何か。

4 **累乗。**固有ベクトルを用いて $T^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を求めよ。（**ヒント：**$(1,0)$ を $(1,2)$ と $(2,-1)$ の一次結合で表せ。）

さらに学ぶために

- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。第 6 章は固有値とその応用へのすぐれた入門である。

- **Kurt Bryan & Tanya Leise, "The $25,000,000,000 eigenvector: the linear algebra behind Google"**, *SIAM Review* 48 (2006)。（250 億ドルの固有ベクトル：Google を支える線形代数）読みやすく、無料で入手できる。
- **3Blue1Brown, *Essence of Linear Algebra***（動画シリーズ、オンラインで無料公開）。この節で扱った幾何学的な考え方そのものを、美しいアニメーションで見せてくれる。

詳しい解説付きの解答は第 7.2 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/eigenvectors.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com