7.1 行列では成り立たない法則

ワークシート

問題

STEP II 1993、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s2-q6

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　実数について、$ab = 0$ ならば $a = 0$ または $b = 0$ であるのはなぜか。その議論は数のどの性質を使っているか。また、その性質は行列でも成り立つか。

段階 1　$\mathbf{AB} = 0$ でありながら $\mathbf{BA} \neq 0$ となることはあるか？

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　o を多く含む 2×2 行列（matrix）を使うとよい。$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を試してみよ。この行列は x 成分を残し、y 成分を o にする。

手を止めて、やってみよう　すべてのベクトルを y 軸上に移す零でない $\mathbf{B}$ を見つけよ。そうすれば、その後 $\mathbf{A}$ がそれを o にする。次に $\mathbf{BA}$ も計算してみよ。これは零行列になるだろうか？

段階 2　二乗の差（difference of two squares）

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう　どの積についても順序を入れ替えずに $(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ を展開せよ。これが $\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2$ に等しくなるのはどのようなときか。小問 (i) で用いた行列を再び使えないだろうか？

段階 3　$\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ の零でない解

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう　$\det \mathbf{A} \neq 0$ ならば、$\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ の両辺に左から $\mathbf{A}^{-1}$ を掛けよ。$\mathbf{X}$ は何でなければならないか？

手を止めて、やってみよう　$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で $ad = bc$ のとき、列ベクトル（column vector）$\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$ を試してみよ。$\mathbf{A}$ はこれらをどこに移すか。そのどちらかを用いて零でない $\mathbf{X}$ を作れ。

段階 4　平方根（square root）はいくつあるか？

扱う内容：小問 (iv)

> **手を止めて、やってみよう**　$\mathbf{X}^2 + \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B} = (\mathbf{X} - \mathbf{I})^2$ となるように $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ を選べ。すると、$\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ を満たす行列 $\mathbf{N}$ が数多く必要になる。$\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を調べてみよ。

背後にある数学

代数としての行列

ケイリー（Arthur Cayley）は 1858 年に行列の代数を導入し、行列を単なる係数の表ではなく、足したり掛けたりできる一つの対象として扱った。彼はすぐに積が可換でないことに気づき、**ケイリー–ハミルトンの定理**（Cayley–Hamilton theorem）を証明した。すなわち、すべての正方行列は自身の固有方程式（characteristic equation）を満たす。トレース（trace）が t、行列式が d である 2×2 行列については、これは $\mathbf{M}^2 - t\mathbf{M} + d\mathbf{I} = \mathbf{0}$ を意味し、本章ではこの事実を繰り返し用いる（Section 7.4）。2×2 実行列の全体は**環**（ring）をなす。足し算、引き算、掛け算ができるが、掛け算は可換ではなく、**零因子**（zero divisor）、すなわち積が零になる零でない元が存在する。

無限に多くの平方根

段階 4 はさらに印象的にできる。方程式 $\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}$ は明らかな解 $\pm\mathbf{I}$ をもつが、それだけでなく、原点を通る直線に関する平面のすべての鏡映（reflection）$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ も解である。二回鏡映すれば何も変わらないからである。つまり $\mathbf{I}$ の平方根が円周ひ

とつ分だけ存在する。数を係数とする n 次多項式の根が高々 n 個であるのは、数に零因子がないからである。行列には零因子があり、この個数の評価は成り立たなくなる。

物理学における非可換性

古典力学では、位置 x と運動量（momentum）p は数であり、$xp = px$ である。量子力学ではこれらは演算子（operator、無限行列）となり、$xp - px = \mathrm{i}\hbar$ を満たす。ここで $\hbar$ はプランク定数（Planck's constant）を 2π で割ったものである。このただ一つの非可換関係から、ハイゼンベルクの不確定性原理、すなわち位置と運動量を同時に正確に知ることはできないという原理が導かれる。1925 年にハイゼンベルクが量子力学の規則を発見したとき、彼は行列が何であるかを知らなかった。ハイゼンベルクが考案した奇妙な乗法の規則が行列の積であることに気づいたのは、マックス・ボルン（Max Born）であった。

次の一歩

1 **いつ可換になるか。** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と可換なすべての 2×2 行列を求めよ。

2 **零の平方根。** $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ を満たすすべての 2×2 実行列 $\mathbf{N}$ を求めよ。（**ヒント：**ケイリー–ハミルトンの定理を用いて $\operatorname{tr}\mathbf{N} = \det\mathbf{N} = 0$ を示せ。）

3 **鏡映。** すべての鏡映行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ の二乗が $\mathbf{I}$ になることを示し、その鏡映の軸となる直線を求めよ。

4 **ケイリー–ハミルトン。** すべての 2×2 行列が $\mathbf{M}^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\mathbf{M} + (\det\mathbf{M})\mathbf{I} = \mathbf{0}$ を満たすことを、直接計算によって証明せよ。

さらに学ぶために

- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。最も広く読まれている線形代数の入門書であり、理解を重視している。
- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right***（Springer、オンラインで無料公開）。行列よりも線形写像（linear map）を中心に据えた、より抽象的な取り組み方。
- **Jim Baggott, *The Quantum Story***（Oxford University Press）。ハイゼンベルクの行列力学を含む、量子力学の歴史。

詳しい解説付きの解答は第 7.1 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/matrix-rules.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com