# 6.8 特異行列からなる群

## ワークシート

### 問題

**STEP III 1996、問 6**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/96-s3-q6

## ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　小問 (i) において、単位行列 $\mathbf{I}$ は $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ の形をしていない。では、$S$ の単位元は何でありうるだろうか。

### 段階 1　閉性（closure）

扱う内容：小問 (i)

? **考えてみよう**　4 つの成分がすべて $a$ である行列を $\mathbf{M}_a$ と書く。$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b$ はどうなるか。

### 段階 2 群の公理（group axioms）

扱う内容：小問 (i)

**考えてみよう** 単位行列（identity matrix）$\mathbf{I}$ は $S$ に属さない。では、$S$ の単位元（identity）は何になりうるか。$\mathbf{M}_e\mathbf{M}_a = \mathbf{M}_a$ を $e$ について解け。

**手を止めて、やってみよう** 逆元（inverse）については、$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_e$ を $b$ について解け。

### 段階 3　特異性は広がる

扱う内容：小問 (ii)

> **手を止めて、やってみよう**　$\mathbf{A} \in G$ が特異（singular）であるとし、$\mathbf{B}$ を $G$ の任意の元とする。$\mathbf{A}$ の群における逆元を用いて、$G$ のある元 $\mathbf{C}$ により $\mathbf{B} = \mathbf{AC}$ と書け。そして行列式（determinant）をとれ。

**段階 4** $3 \times 3$ **の例**

扱う内容：小問 (ii)

> **考えてみよう** 小問 (i) を $3 \times 3$ 行列に一般化できるだろうか。あるいは、3 つの座標のうち 2 つを無視する行列を用いて、もっと簡単な例を見つけられないだろうか。

## 背後にある数学

### 冪等元と隠れた可逆性

任意の行列の群の単位元 $\mathbf{E}$ は $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$ を満たす。すなわち**冪等**（idempotent）である。幾何学的には、冪等行列は**射影**（projection）である。つまり、すべてのベクトルをある部分空間（subspace）の上に写し、その部分空間内のベクトルは動かさない。小問 (i) では、$\mathbf{E}$ は平面を直線 $y = x$ の上に射影し、各行列 $\mathbf{M}_a$ はまずその直線上に射影してから、直線に沿って $2a$ 倍に伸縮する（図 6.8.1）。直線上では、群は可逆な伸縮として作用し、直線に垂直な方向は単に無視している。したがって $S$ の正体は、平面内の直線上に住む、乗法に関する 0 でない実数全体の群（対応 $\mathbf{M}_a \mapsto 2a$ による）である。これは一般に成り立つ。すなわち、どんな行列の群も、基底を取り替えれば、その単位元の像の上に作用する正則行列の群に、0 を詰めて埋め込んだものになっている。

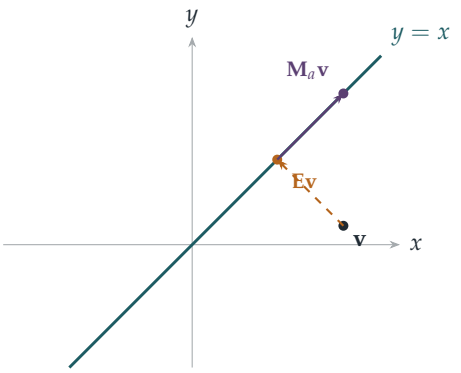


**図 6.8.1**　小問 (i) の行列のはたらき。単位元 $\mathbf{E}$ はすべてのベクトル $\mathbf{v}$ を直線 $y = x$ の上に射影する（琥珀色の破線）。各 $\mathbf{M}_a$ は同じ射影を行ったのち、直線に沿って $2a$ 倍に伸縮する（紫色。ここでは $2a = \frac{16}{9}$）。直線そのものの上では、群は通常の可逆な拡大・縮小として作用する。

### 抽象と具体

人々が最初に研究した群は具体的なものであった。置換、対称性、正則行列などである。抽象的な定義（3 つの公理を満たす演算をもつ集合）は、それらから抽出されたものである。この問題は抽象的な見方の価値を示している。$S$ と乗法に関する 0 でない実数全体の群とは**同型**（isomorphic）であり、一方は特異行列からなり他方は数からなるにもかかわらず、装いが違うだけの同じ群なのである。見かけの異なる 2 つの構造がいつ「同じ」であるかを見抜くことは代数学の中心的なスキルの 1 つであり、同型という概念は、数学者がそれを厳密にするための手段である。

## 次の一歩

1. **同型写像。** 写像 $\mathbf{M}_a \mapsto 2a$ が、$S$ から 0 でない実数全体への一対一対応（one-to-one correspondence）であって、行列の積を数の積に移すことを示せ。

2. **群にならない例。** $a \neq 0$ である行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 全体の集合は積について閉じているが、群ではないことを示せ。（**ヒント**：単位元を探してみよ。左単位元はあるか。右単位元はあるか。）

3. **冪等行列。** $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$ を満たす $2 \times 2$ 実行列 $\mathbf{E}$ をすべて求めよ。また、それらを幾何学的に説明せよ。

4. **すべての成分が等しい行列。** すべての成分が $a \neq 0$ に等しい $n \times n$ 行列全体は積について群をなすことを示し、その単位元を求めよ。

## さらに学ぶために

- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry*** (Springer)。行列の群と同型を、多くの幾何学的な例とともに扱う。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*** (Wellesley-Cambridge)。射影と冪等行列がわかりやすく説明されている。
- **Joseph Gallian, *Contemporary Abstract Algebra*** (CRC Press)。風変わりな群の例を多く含む、親しみやすい入門書。

詳しい解説付きの解答は第 6.8 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch06/singular-group.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com