6.7 四元数群

ワークシート

問題

STEP III 1993、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s3-q5

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　組 (z_1, z_2) を「数」$z_1 + z_2\mathrm{j}$ を表すものと考えよ。ここで j は新しい記号で、$\mathrm{j}^2 = -1$ を満たし、複素数 w に対して $\mathrm{j}w = w^*\mathrm{j}$ を満たすとする。これらの規則を用いて $(z_1 + z_2\mathrm{j})(w_1 + w_2\mathrm{j})$ を計算せよ。$\circ$ の式が得られるだろうか。

段階 1　行列による結合法則の確認

扱う内容：結合法則（associativity）

考えてみよう　$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ を直接確かめるのは手間がかかる。もっと鮮やかな方法はないだろうか。

手を止めて、やってみよう　(z_1, z_2) を複素行列 $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}$ に対応させよ。このような行列二つの積の第 1 行はどうなるか。行列の積は結合法則を満た

す。

段階 2 可換ではない

扱う内容：可換性（commutativity）と四つの積

考えてみよう $(0,1)\circ(\mathrm{i},0)$ と $(\mathrm{i},0)\circ(0,1)$ を計算してみよ。次に、定義に $\circ$ を代入して四つの特別な積を求めよ。

段階 3　位数 8 の群

扱う内容：集合 S_1

考えてみよう　四つの特別な積を用いて、S_1 が演算について閉じている（closed）ことを示せ。単位元（identity）は何か。

手を止めて、やってみよう　各元の 2 乗を求めよ。2 乗すると単位元になる元はどれか。また $(-1, 0)$ になる元はどれか。それを用いて、各元の位数（order）と逆元（inverse）を求めよ。

段階 4 部分群

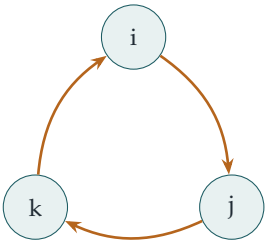
扱う内容：部分群（subgroup）と行列

> **考えてみよう** B の累乗を計算せよ。次に、与えられた行列の累乗を計算せよ。それらを対応させよ。

背後にある数学

複素数の先へ

実数は、加法・乗法・除法ができる 1 次元の数の体系であり、複素数は 2 次元の体系である。ハミルトンの四元数は 4 次元であり、やはり除法はできるが、乗法はもはや可換ではない（図 6.7.1）。1878 年、フロベニウス（Ferdinand Frobenius）は、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$、$\mathbb{H}$（ハミルトンにちなむ）の 3 つが、結合的な乗法をもつ実数上の有限次元「多元体」（division algebras）のすべてであることを証明した。結合法則を諦める代わりに、実数・複素数・四元数と同様に大きさが乗法的である、すなわち $|xy| = |x|\,|y|$ という性質を保つことにすると、もうちょうど 1 つだけ存在する。1840 年代に John Graves とケイリー（Arthur Cayley）が発見した 8 次元の**八元数**（octonions）である。1898 年、フルヴィッツ（Adolf Hurwitz）は、このような体系がこの 4 つに限ることを証明した。（大きさに関する条件を外すと、ほかにもっと奇妙な非結合的多元体が存在するが、ボット（Raoul Bott）、ミルナー（John Milnor）、ケルヴェア（Michel Kervaire）による 1958 年の深い定理によれば、有限次元の実多元体の次元は必ず 1、2、4、8 のいずれかである。）



矢印の向き：$ij = k, jk = i, ki = j$

矢印と逆向き：$ji = -k, kj = -i, ik = -j$

さらに $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

図 6.7.1　ハミルトンの乗法規則。i、j、k のうち 2 つを矢印の向きに掛けると残りの 1 つが得られ、矢印と逆向きに掛けると残りの 1 つの符号を変えたものが得られる。8 個の元 $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ が、この問題の四元数群 Q_8 をなす。

3 次元の回転

絶対値が 1 の四元数は 3 次元空間の回転を記述する。単位ベクトルの軸 $\mathbf{u}$ のまわりの角 θ の回転は $q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(u_1 i + u_2 j + u_3 k)$ に対応し、ベクトル $\mathbf{v}$（$v_1 i + v_2 j + v_3 k$ と表す）に $\mathbf{v} \mapsto q\mathbf{v}q^{-1}$ によって作用する。回転の合成は四元数の乗法にほかならない。この方法は行列や角度を用いるよりも効率的で数値的に安定しており、さらに「ジンバルロック」（gimbal lock）を回避できる。ジンバルロックとは自由度が 1 つ失われる現象で、アポロ計画の宇宙飛行士たちは、ジャイロスコープに基づく航法装置でこれに対処しなければならなかった。半角 $\frac{\theta}{2}$ は、深い事実への手がかりでもある。360° 回転すると $q = -1$ となり、1 にはならないのである。これは物理学者が電子のふるまい（スピン（spin））の中に見ている事実である。

4 つの平方数

四元数の絶対値は、複素数の場合と同様に乗法的であり、$|pq| = |p||q|$ が成り立つ。これを成分で書き下すと、オイラー（Euler）の**四平方恒等式**（four-square identity）が得られる。すなわち、4 つの平方数の和どうしの積は、それ自身 4 つの平方数の和である。これは、すべての正の整数が 4 つの平方数の和であるというラグランジュ（Lagrange）の定理の鍵となるステップである。この定理は Section 7.8 で証明する。これは Section 1.6 の二平方の結果の 4 次元版にあたる。

次の一歩

1. **ハミルトンの規則。**組を用いて、$C \circ B = D$ および $B \circ C = H$、すなわち $ij = k$ および $ji = -k$ を確かめよ。

2. **位数 2 の元はただ 1 つ。**$E = -1$ が Q_8 における唯一の位数 2 の元であることを示せ。このことから、Q_8 は正方形の対称性の群（位数 2 の元を 5 個もつ）と同型で

ないことを導け。

3 **4 つの平方数。** $\det M(z_1, z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2$ を示せ。$\det(M_1 M_2) = \det M_1 \det M_2$ を用いて、4 つの平方数の和どうしの積は 4 つの平方数の和であることを導け。

4 **部分群。** Q_8 の部分群をすべて求めよ。$\{A\}$ 以外のすべての部分群は E を含むこと、および Q_8 が位数 4 の 3 つの巡回部分群の和集合であることを示せ（Section 6.6 と比較せよ）。

さらに学ぶために

- **John Conway & Derek Smith, *On Quaternions and Octonions***（A. K. Peters）。四元数と八元数の幾何と算術。高度だが非常に興味深い。
- **John Baez,「The octonions」**, *Bulletin of the American Mathematical Society* 39 (2002)。オンラインでも無料で読める。すばらしい概説であり、序論は今すぐにでも読める。
- **Andrew Hanson, *Visualizing Quaternions***（Morgan Kaufmann）。回転のための四元数と、そのグラフィックスへの応用。

詳しい解説付きの解答は第 6.7 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch06/quaternions.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com