6.6 部分群の和集合

ワークシート

問題

STEP II 1988、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s2-q9

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　K が部分群で、$a \in K$ だが $b \notin K$ であるとき、ab は K に属しうるだろうか。

段階 1　2 つの部分群では覆えない

扱う内容：2 つの部分群

考えてみよう　G_1 も G_2 も G 全体ではないと仮定する。$a \notin G_1$ と $b \notin G_2$ を選ぶ。a と b はそれぞれどこに属していなければならないか？

手を止めて、やってみよう　次に ab を考える。これは G_1 か G_2 のどちらかに属する。それぞれの場合について、a または b をその部分群（subgroup）の元の積として表してみよ。

段階 2　3 つの部分群なら覆える

扱う内容：3 つの部分群

> **手を止めて、やってみよう**　すべての元が自分自身の逆元（inverse）であるような小さな群（group）を試してみよ。その群の、2 つの元からなる部分群はどのようなものか？

背後にある数学

対称性の言語

群は 19 世紀に、いくつもの方向から同時に生まれた。多項式の根の置換に関するガロア（Galois）の研究（Section 6.4）、置換に関するコーシー（Cauchy）の研究、そして幾何学や結晶学における対称性の研究である。上で述べた抽象的な定義、すなわち三つの公理を満たすものはすべて群であるという定義は、19 世紀末までに確立した。その威力は一般性にある。この問題のように公理から証明された定理は、数の群、行列の群、対称変換の群、置換の群のすべてについて同時に成り立つのである。今日、群はいたるところに現れる。素粒子物理学（標準模型は対称性の群の上に築かれている）、化学（分子の対称性がスペクトルを決める）、暗号理論（楕円曲線の群、Section 1.9）、そしてルービックキューブの解法などである。

いくつの部分群が必要か

この問題からは自然な問いが生まれる。和集合が群全体となるような真部分群の個数の最小値はいくつか。この問題により、それが 2 になることはない。1926 年に Gaetano Scorza は、群が三つの真部分群の和集合となるのは、クラインの四元群を「商」（quotient）としてもつときであり、かつそのときに限ることを示した。1994 年に J. H. E. Cohn はこの一般的な問題を研究していくつかの予想を立て、1997 年に

M. J. Tomkinson は、この最小値が 7 となる群は存在しないことを証明した。一方、3 から 6 までの数はすべて実際に現れる。述べるのは簡単だが驚くほど奥が深い、このような問いは群論に典型的なものである。

ベクトル空間

同様の議論により、実数上のベクトル空間（vector space）（平面や 3 次元空間など）は、有限個の真部分空間（proper subspace）の和集合には決してならないことが示される。つまり、平面は原点を通る有限個の直線の和集合にはならない。しかし有限体（finite field）上ではそれが可能である。二つの元からなる体の上の平面は、まさにクラインの四元群そのものであり、その三本の直線の和集合となっている。

次の一歩

1 **群であることを確かめる。** クラインの四元群の乗積表を書き出し、群の公理を確かめよ。また、乗法に関する群 $\{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$ とは同じでないことを示せ。（**ヒント**：自分自身の逆元となっている元はどれか。）

2 **巡回群。** すべての元がある一つの元 g のべきであるとき、その群は**巡回群**（cyclic group）であるという。巡回群は、いくつあっても真部分群の和集合にはならないことを示せ。（**ヒント**：g を含む部分群はどれか。）

3 **整数全体。** $(\mathbb{Z}, +)$ が部分群 $2\mathbb{Z}$（偶数全体）と $3\mathbb{Z}$（3 の倍数全体）の和集合ではないことを直接示せ。また、何らかの二つの真部分群の和集合になることはあるか。

4 **平面内の直線。** やや難 平面 $\mathbb{R}^2$ は原点を通る有限個の直線の和集合ではないことを示せ。（**ヒント**：各直線は、放物線 $y = x^2$ 上の点を原点以外には高々一つしか含まない。）

さらに学ぶために

- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry***（Springer）。幾何学的な例を軸に展開される、美しい図版入りの入門書（『群と対称性』）。
- **Nathan Carter, *Visual Group Theory***（Mathematical Association of America）。図を通して群を学ぶ本で、大学入学前に最適である（『目で見る群論』）。
- **Peter Neumann, Gabrielle Stoy & Edward Thompson, *Groups and Geometry***（Oxford University Press）。オックスフォード大学 1 年次の古典的な教科書（『群と幾何学』）。

詳しい解説付きの解答は第 6.6 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch06/subgroup-unions.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com