6.4 四次方程式を解く

ワークシート

問題

STEP III 2017、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s3-q3

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　四つの対象 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を二つの組に分ける方法は何通りあるか。

段階 1 欠けている係数

扱う内容：A を求める

考えてみよう $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を 2 つずつの組に分ける方法は何通りあるか。

手を止めて、やってみよう $y^3 + Ay^2 + By + C = 0$ において、解（roots）の和は何か。また、$\alpha\beta + \gamma\delta, \ldots$ の 3 つの量の和を、4 次式（quartic）の係数（coefficients）を用いて表すとどうなるか。

段階 2　具体的な 3 次方程式

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　$p=0, q=3, r=-6, s=10$ を代入せよ。定数項（constant term）の小さな約数（divisors）を試してみよ。

段階 3　解の組

扱う内容：小問 (ii)

手を止めて、やってみよう　$(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)$ は、2 つの解の積 6 個すべての和から、そのうちの 1 つを引いたものである。また、$\alpha\beta\cdot\gamma\delta$ は何か。

段階 4　4 次方程式を解く

扱う内容：小問 (iii)

> **手を止めて、やってみよう**　$\alpha+\beta$ と $\gamma+\delta$ の和と積はわかっている。どちらがどちらかを決めるには、3 つの解の積の和を $\alpha\beta, \gamma\delta, \alpha+\beta, \gamma+\delta$ を用いて表し、r を使え。

背後にある数学

仕掛けがうまくいく理由：根の置換

1770 年、ジョゼフ＝ルイ・ラグランジュ（Joseph-Louis Lagrange）は、三次方程式や四次方程式の解法がなぜうまくいくのかを問い、その答えを根の**置換**（permutation）に見いだした。四つの根を並べ替える方法は 24 通りある。そのどれによっても、三つの量 $y_1 = \alpha\beta+\gamma\delta$, $y_2 = \alpha\gamma+\beta\delta$, $y_3 = \alpha\delta+\beta\gamma$ は互いに入れ替わるだけである。四つの根の並べ替えはそれぞれ、三つの組分けの並べ替えを引き起こすのである（図 6.4.1）。したがって、これらの量は根について対称な係数をもつ次数 3 の多項式を満たす。現代の言葉でいえば、対称群（symmetric group）S_4（24 個の置換すべて）から S_3（組分けの 6 個の置換）への全射な群準同型（group homomorphism）が存在し、それこそが四次方程式を三次方程式に帰着できる理由である。

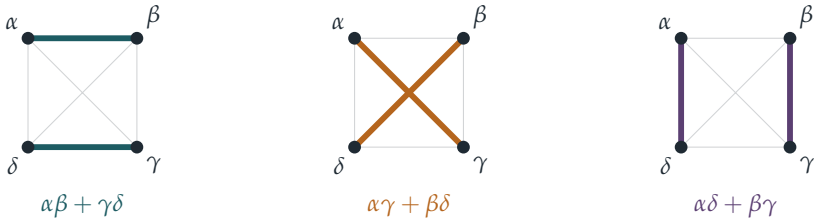

図 6.4.1　四つの根を二つの組に分ける三通りの方法と、それに対応する分解三次方程式の根。$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ をどのように並べ替えても、これら三つの図が互いに入れ替わるだけである。そのため、三つの量は四次方程式の係数で表せる係数をもつ三次方程式を満たす。

五次方程式

五つの根の場合について、ラグランジュは根の置換のもとで少数の値しかとらない同様の量を探したが、役に立つものは見つからなかった。1799 年にパオロ・ルフィニ（Paolo Ruffini）が、そして 1824 年にニールス・ヘンリック・アーベル（Niels Henrik Abel）が（証明を完成させて）、四則演算と冪根（radicals）だけを用いた五次方程式の根の一般的な公式は存在しないことを示した。その数年後、エヴァリスト・ガロアは、どの多項式が冪根によって解けるのかを正確に説明した。それは、**根の対称性のなす群**がある特定の仕方でより単純な部分に分解できるような多項式である。対称群 S_4 はそのように分解できる（S_3 やより小さな群を経由して）が、S_5 はできない。S_5 には、それ以上分解できない大きさ 60 の「単純」（simple）な部分が含まれているからである。ガロアは 1832 年、二十歳で決闘により命を落とす前夜に、自らの理論を急いで書き上げた。この理論は今日、数学の学位課程における至宝の一つであり、通常は三年次に学ぶ。

三次方程式を解く

三次方程式そのものも同様の仕掛けで解ける。被約三次式（depressed cubic）$x^3 - 3px + q$ を二つの完全立方（perfect cube）の組み合わせとして書くと、二次方程式に帰着される。これが演習にある 2011 年の問題の方法であり、カルダーノの公式と同値である。三次方程式が三つの実数解をもつときでも、この公式は途中で複素数（complex numbers）を必要とする。この現象が、数学者たちに複素数を真剣に扱うことを迫ったのである（第 5 章の導入を参照）。

次の一歩

1 **三次方程式を確かめる。** $y_1 = \alpha\beta + \gamma\delta$ などとするとき、$y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = pr - 4s$ であることを確かめよ。（展開して、$\sum\alpha = -p, \sum\alpha\beta\gamma = -r, \alpha\beta\gamma\delta = s$ を用いよ。）

2 **立方の和としての三次方程式。** STEP III 2011、問 3（step.maths.org/questions/11-s3-q3）に取り組んでみよ。この問題は、三次式を二つの立方の組み合わせとして書くことで三次方程式を解くもので、本節とはまったく異なる道筋である。答えを数値的に確かめよ。

3 **もう一つの四次方程式。** 本節の方法を用いて $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2 = 0$ を解け。（分解三次方程式の根の一つは小さな整数である。）

4 **置換を数える。** $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の 24 個の置換のうち、組分け $\{\alpha\beta, \gamma\delta\}$ を自分自身に移すものをすべて求めよ。それが 8 個あることを示せ。（これらは S_4 の部分群（subgroup）をなす。）

さらに学ぶために

- **Mario Livio, *The Equation That Couldn't Be Solved*** (Simon & Schuster)。五次方程式と群論誕生の物語を、一般の読者向けに描いたもの。
- **Ian Stewart, *Why Beauty Is Truth: A History of Symmetry*** (Basic Books)。バビロニアの方程式からガロア、そしてその先までを扱う。
- **Ian Stewart, *Galois Theory*** (CRC Press)。学部生向けの教科書で、まさにこの内容を扱う歴史的な序章がある。

詳しい解説付きの解答は第 6.4 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch06/quartic.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com