6.3 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ を根にもつ多項式

ワークシート

問題

STEP II 2023、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　$\sqrt{2}$ を根にもつ多項式を見つけるには、$x = \sqrt{2}$ の両辺を 2 乗して平方根を取り除く。では、異なる 2 つの平方根を 1 つずつ取り除くにはどうすればよいだろうか。

段階 1　二つの平方根

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　$(x - \sqrt{2})^2 = 3$ を展開せよ。残った平方根を一方の辺に単独で置き、両辺を 2 乗する。

段階 2 三つの平方根

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ とおく。すると $x-\sqrt{5}$ は f の根（root）である。

手を止めて、やってみよう $\mathrm{f}(x-\sqrt{5})=0$ を $P(x)+\sqrt{5}\,Q(x)=0$ の形に書け。そのうえで $\sqrt{5}$ を一方の辺に単独で置き、両辺を 2 乗する。

段階 3　3 次式と平方根

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう　$x = a + \sqrt{2}$ ならば、$x - \sqrt{2}$ は $t^3 - 3t + 1$ の根である。これを代入し、$\sqrt{2}$ を含む項と含まない項に分けて、両辺を 2 乗する。

段階 4 二つの立方根

扱う内容：小問 (iv)

手を止めて、やってみよう 2 乗しても立方根は消えない。$x = \sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ とおき、$(u+v)^3 = u^3+v^3+3uv(u+v)$ を用いて両辺を 3 乗せよ。何が残るか。また、それをどのように消せばよいか。

背後にある数学

体とその次数

p、q を有理数とする数 $p+q\sqrt{2}$ 全体の集合 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ は、加法、減法、乗法、(0 でない数による) 除法について閉じている。すなわち、これは**体** (field) である。これは $\mathbb{Q}$ 上の 2 次元の「ベクトル空間」(vector space) であり、基底 (basis) は $1, \sqrt{2}$ である。そこで、これは $\mathbb{Q}$ 上**次数** (degree) 2 をもつという。$\sqrt{3}$ を添加すると $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ が得られ、その基底は $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$、次数は 4 である。さらに $\sqrt{5}$ も添加すると次数は 8 になる (図 6.3.1)。**塔法則** (tower law) とは、体の塔をのぼるにつれて次数が掛け合わされるという法則である。ある数が生成する体の次数は、その数の**最小多項式** (minimal polynomial)、すなわちその数が満たす有理数係数多項式のうち次数が最小のものの次数に等しい。この問題の多項式 f と g は最小多項式であることが示せるので、$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ の次数は 4、$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ の次数は 8 である。実際、ただ 1 つの数 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ が次数 8 の体全体を生成するのである。

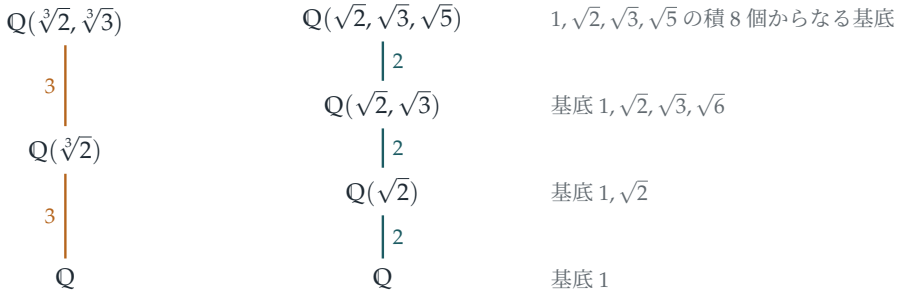

図 6.3.1　体の塔。右：平方根を 1 つ添加するごとに次数は 2 倍になり、$2 \times 2 \times 2 = 8$ が得られる。これは g の次数である。左：立方根を 1 つ添加するごとに次数は 3 倍になり、$3 \times 3 = 9$ が得られる。これは k の次数である。塔をのぼると次数は掛け合わされる。この**塔法則**こそが、定規とコンパスによる作図の不可能性の証明の鍵である。

立方体倍積問題

定規とコンパスによる作図（ruler-and-compass construction）で得られる長さは、有理数から出発して 1 次方程式と 2 次方程式を繰り返し解くことで得られるものに限られる。そのような各段階は次数 1 または 2 の体の拡大を与えるので、塔法則により、作図可能な長さはすべて次数が 2 の累乗である体に属し、それ自身の次数も 2 の累乗となる。ところが $\sqrt[3]{2}$ の最小多項式は $x^3 - 2$ であり、その次数は 3 である。3 は 2 の累乗ではないから $\sqrt[3]{2}$ は作図不可能であり、紀元前 430 年ごろに提起された、定規とコンパスで立方体の体積を 2 倍にするというデロスの問題は不可能である。ヴァンツェル（Pierre Wantzel）は 1837 年にこれを証明し、あわせて一般の角の三等分が不可能であることと、作図可能な正多角形の分類（Section 6.2）も示した。2000 年にわたる試みは、次数に関する議論によって終止符を打たれたのである。

代数的数は体をなす

この問題の方法は、具体例を通じて、代数的数の和が代数的であることを示している。一般には、これは線形代数を用いて証明される。α と β の次数をそれぞれ m、n とすると、数 $\alpha^i \beta^j$（$i < m$、$j < n$）全体は次元が高々 mn の空間を張るので、$mn + 1$ 個の累乗 $1, \alpha + \beta, (\alpha + \beta)^2, \ldots$ は一次従属（linearly dependent）でなければならない。これにより次数が高々 mn の多項式が得られる。ここで得た次数 $4 = 2 \times 2$、$6 = 3 \times 2$、$9 = 3 \times 3$ はまさにこのパターンに当てはまる。代数的でない数を**超越的**（transcendental）な数という。e と π はその例であり（エルミート（Hermite）、1873 年、およびリンデマン（Lindemann）、1882 年）、π が超越数であるというリンデマンの定理によって、円積問題もまた不可能であることが証明された。

次の一歩

1 **原始元（primitive element）。** $y = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ とする。$y^3 = 11\sqrt{2}+9\sqrt{3}$ を示し、$\sqrt{2} = \frac{1}{2}(y^3 - 9y)$ を導け。したがって、すべての数 $p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}+s\sqrt{6}$ は y の多項式として表せる。

2 **種類の異なる根号。** $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ を根にもつ、次数 6 の整数係数多項式を求めよ。

3 **既約性（irreducibility）。** $x^4 - 10x^2 + 1$ は有理数の根をもたず、整数係数の 2 つの 2 次式の積として表せないことを示せ。（**ヒント：** $(x^2+ax+b)(x^2-ax+c)$ を試してみよ。）これより $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ の次数が 4 であることを導け。

4 **角の三等分（trisection）。** $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を示し、$\cos 20^\circ$ が $8x^3 - 6x - 1 = 0$ の根であることを導け。この 3 次方程式が有理数の根をもたないと仮定して（これを確かめよ）、60° の角を定規とコンパスで三等分できない理由を説明せよ。

さらに学ぶために

- **Ian Stewart, *Galois Theory***（CRC Press）。『ガロア理論』。体の拡大、塔法則、古典的な作図問題を、大学生向けに解説している。
- **Richard Courant & Herbert Robbins, *What Is Mathematics?***（Oxford University Press）。『数学とは何か』。第 3 章では、予備知識なしでギリシアの三大問題の不可能性を証明している。
- **Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond***（Springer）。定規とコンパスによる作図を現代代数学の観点から扱っている。

詳しい解説付きの解答は第 6.3 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch06/field-extensions.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com