6.2 ガウスの正 17 角形

ワークシート

問題

STEP II 1991、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s2-q4

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　$\cos\frac{2\pi}{5}$ に関する前半部分が、なぜ 17 角形についての問題に登場するのだろうか。

段階 1 正五角形（pentagon）

扱う内容：最初の部分、$\phi = \frac{2\pi}{5}$

考えてみよう $y^2 = (\cos\phi + \cos 2\phi)^2$ を展開し、$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\big(\cos(A+B) + \cos(A-B)\big)$ を用いて各積を和に直せ。

手を止めて、やってみよう $5\phi = 2\pi$ を用いて $\cos 3\phi$ と $\cos 4\phi$ を簡単にせよ。二次方程式（quadratic）の根（root）のうち、正しいのはどちらか。

段階 2　1 の 17 乗根（seventeenth roots of unity）の和は 0 である

扱う内容：$\theta = \frac{2\pi}{17}$ のときの余弦の和

考えてみよう　$\sum_{k=0}^{16} \cos k\theta$ は、$\omega = e^{i\theta}$ に関する等比級数（geometric series）の実部（real part）である。その和はいくらか。

手を止めて、やってみよう　$\cos(17-k)\theta = \cos k\theta$ を用いて項を対にせよ。

段階 3 余弦を二つの組に分ける

扱う内容：z の値

考えてみよう 残りの四つの余弦の和 $\cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 6\theta + \cos 7\theta$ を z' とおく。$z + z'$ はいくらか。

手を止めて、やってみよう zz' を計算せよ。16 個の積に展開し、それぞれを二つの余弦の和に直して、角を簡単にする。$\cos\theta, \ldots, \cos 8\theta$ はそれぞれ何回現れるか。

段階 4　二次方程式

扱う内容：z の値

> **考えてみよう**　z と z' はある二次方程式の根である。z はどちらの根か。z に含まれる四つの余弦の値を見積もれ。

背後にある数学

ガウス周期

なぜ $\{1,2,4,8\}$ なのか。17 を法として、3 の累乗 $3^0, 3^1, 3^2, \ldots$ は 0 でないすべての剰余（residue）を巡る。

$$1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6.$$

一つおきに $3^0, 3^2, 3^4, \ldots$ をとると 1, 9, 13, 15, 16, 8, 4, 2 が得られ、これらは 17 を法として ±1, ±2, ±4, ±8 であり、ちょうど z に現れる角である。残りの半分からは $\pm3, \pm5, \pm6, \pm7$ が得られ、これは z' に現れる角である。ガウスは、このような類にわたる ω^k の和を**周期**（*periods*）と呼んだ。$17 - 1 = 16 = 2^4$ であるから、剰余は四回半分に分けることができ、各段階で周期は、前の段階の周期を係数に含む二次方程式を満たす。四つの二次方程式、つまり四つの平方根によって、有理数から $\cos\frac{2\pi}{17}$ まで降りていくことができる。

$$\cos\tfrac{2\pi}{17} = \tfrac{1}{16}\Big(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\Big).$$

どの段階も平方根しか含まず、平方根は（相似な三角形や半円を用いて）定規とコンパスで作図できるので、正 17 角形は作図可能である。

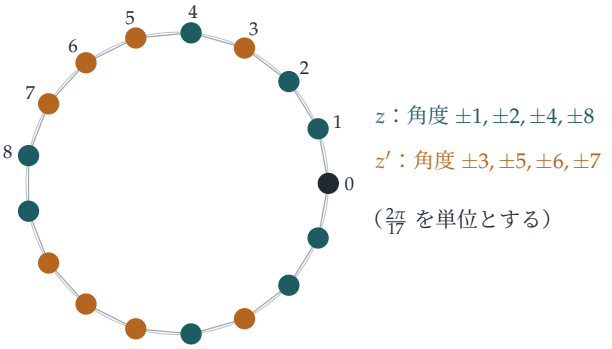

図 6.2.1　正 17 角形の頂点を、ガウスの二つの周期に分けたもの。ティール色の頂点は（$\frac{2\pi}{17}$ を単位として）角度 $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ の位置にあり、それらの x 座標の和は $2z = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ である。琥珀色の頂点からは $2z' = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ が得られる。

どの多角形が作図できるか

ガウスが主張し、1837 年にヴァンツェル（Pierre Wantzel）が証明したところによれば、正 n 角形が定規とコンパスで作図できるのは、n が 2 の累乗と相異なる**フェルマー素数**（*Fermat primes*）、すなわち $2^{2^m}+1$ の形の素数の積との積であるとき、かつそのときに限る。知られているフェルマー素数は 3, 5, 17, 257, 65537 であり、これらは Section 1.1 のフェルマー数である。（フェルマー（Fermat）はこの形の数がすべて素数であると予想したが、オイラー（Euler）は $2^{32}+1$ が 641 で割り切れることを示した。それ以降、新たなフェルマー素数は一つも見つかっていない。）したがって正 257 角形と正 65537 角形は作図可能である。19 世紀には Johann Hermes が約十年をかけて正 65537 角形の作図法を詳細に書き上げ、その手稿はゲッティンゲンに保管されている。正 7 角形と正 11 角形は作図できない。7 と 11 はフェルマー素数ではないからである（$7-1=6$ と $11-1=10$ は 2 の累乗ではない）。正 9 角形も作図できない。$9=3^2$ ではフェルマー素数 3 が重複するからである。ヴァンツェルの証明には、Section 6.3 で扱う体の拡大次数（field degrees）の理論が用いられる。

次の一歩

1 **正七角形。** STEP II 1995、問 6（step.maths.org/questions/95-s2-q6）に取り組んでみよう。この問題は、1 の累乗根をグループに分けるというガウスの考え方を 1 の 7 乗根に適用し、余弦の和と正弦の和の正確な値を求めるものである。正弦の和の符号を決めるところが微妙な一歩である。

2 **正五角形。** $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ を示し、それを用いて正五角形の定規とコンパスによる作図法を説明せよ。

3 **もう一方の周期。** $z' = \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 6\theta + \cos 7\theta = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$ であることを数値的に確かめよ。

4 **生成元。** 17 を法とする 3 の累乗は 0 でないすべての剰余を与えるが、2 の累乗はそうではないことを示せ。2 の累乗はどの剰余を与えるか。

さらに学ぶために

- **Ian Stewart, *Galois Theory***（CRC Press）。『ガロア理論』。定規とコンパスによる作図と正 17 角形を扱う章がある。
- **Richard Courant & Herbert Robbins, *What Is Mathematics?***（Oxford University Press）。『数学とは何か』。第 3 章は、正 17 角形を含む作図についての、初等的で見事な解説である。
- **Daniel Kehlmann, *Measuring the World***（Quercus）。『世界の測量』。ガウスとフンボルト（Alexander von Humboldt）を描いた喜劇的な小説であり、息抜きに最適である。

詳しい解説付きの解答は第 6.2 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch06/gauss-17gon.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com