6.1 1 の累乗根を根にもつ多項式

ワークシート

問題

STEP III 2010、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s3-q3

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　1 の n 乗根はどれも $z^n = 1$ を満たす。しかし、1 を与える最小の正の冪は n より小さいかもしれない。四つの 1 の 4 乗根 $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}$ のそれぞれについて、その最小の冪はいくつか？

段階 1 最初のいくつか

扱う内容：4 乗根と小問 (i)

考えてみよう 1 の 4 乗根（4th roots of unity）1, i, −1, −i のそれぞれについて、何乗すれば初めて 1 になるか。つまり 1 になる最小の正の冪指数は何か。原始的（primitive）なものはどれか。

手を止めて、やってみよう 1 の 6 乗根を、何乗すれば初めて 1 になるかによって分類せよ。$n = 3$ と $n = 5$ の場合、原始的でない 1 の n 乗根はどれか。$x^n - 1$ を対応する因数で割れ。

段階 2　どの n で x^4+1 が得られるか

扱う内容：小問 (ii)

> **手を止めて、やってみよう**　$x^4=-1$ ならば x^8 はいくらか。1 になる最小の冪指数は 8 を割り切り、しかも $x^4\neq 1$ であることから、その値として何がありうるか。

段階 3　素数

扱う内容：小問 (iii)

> **考えてみよう**　p が素数（prime）のとき、1 の p 乗根の位数（order）として何がありうるか。$n=3$ と $n=5$ の場合に行ったことを一般化せよ。

段階 4 円分多項式は他の二つの円分多項式の積にはならない

扱う内容：小問 (iv)

手を止めて、やってみよう $\mathrm{C}_q = \mathrm{C}_r\mathrm{C}_s$ と仮定する。C_r の根を一つとると、その位数はいくらか。一方、この恒等式からはその位数はいくらになるか。1 の冪根の位数はただ一つに定まる。

背後にある数学

$x^n - 1$ の因数分解

1 の n 乗根はどれも、n を割り切るある位数 d をもつ。また $d \mid n$ のとき、位数 d の 1 の d 乗根はどれも 1 の n 乗根である。したがって $x^n - 1$ の根は位数によって類に分かれ、

$$x^n - 1 = \prod_{d \mid n} \mathrm{C}_d(x)$$

が得られる。たとえば $x^6 - 1 = \mathrm{C}_1\mathrm{C}_2\mathrm{C}_3\mathrm{C}_6 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ である。図 6.1.1 は、12 個の 1 の 12 乗根をこのように分類したものである。原始 n 乗根の個数、すなわち C_n の次数は、1 から n までの k のうち n と共通因数をもたないものの個数であり、これが**オイラーのトーシェント関数**（Euler's totient function）$\varphi(n)$ である。次数を比較すると、恒等式 $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$ が得られる。

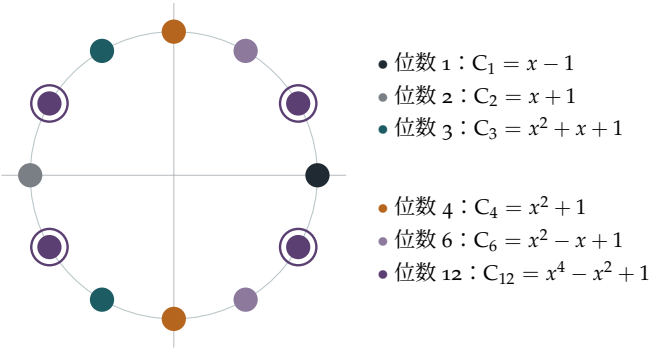

図 6.1.1　12 個の 1 の 12 乗根を位数によって色分けしたもの。4 個の原始 12 乗根（丸で囲んだもの）は C_{12} の根である。すべての類を合わせると $x^{12} - 1 = C_1C_2C_3C_4C_6C_{12}$ となり、次数は $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12$ である。

整数係数と、ある意外な事実

定義からは明らかではないが、どの円分多項式も**整数**係数をもつ。（$x^n - 1$ の因数分解と数学的帰納法（induction）を用いる。C_n は $x^n - 1$ をそれ以前の円分多項式の積で割ったものであり、整数係数の多項式をモニック（monic、最高次の係数が 1）な整数係数多項式で筆算により割っても、係数は整数のままである。）長い間、知られていた例はすべて係数が $0, 1, -1$ のいずれかであった。最初の例外は C_{105} で、これは項 $-2x^7$ を含み、1883 年に Migotti によって発見された。$105 = 3 \times 5 \times 7$ は、相異なる三つの奇素因数をもつ最小の数である。実は、円分多項式の係数はいくらでも大きくなりうる。

既約性

小問 (iv) は、円分多項式が他の二つの円分多項式の積にならないことを示している。実はもっと強いことが成り立つ。C_n は、より低い次数の有理数係数多項式の積にはまったく因数分解できないのである。ガウスはこれを n が素数の場合に証明し（これは大学の最初の代数の講義で学ぶ**アイゼンシュタインの判定法**（Eisenstein's criterion）から導かれる）、クロネッカー（Kronecker）とデデキント（Dedekind）が一般の n の場合に証明した。この**既約性**（irreducibility）こそが、円分多項式を 1 の冪根に関連する多項式の中の「素数」たらしめているものであり、1 の冪根のガロア理論（Galois theory）の出発点でもある。

次の一歩

1 **因数分解を確かめる。** $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1) = x^6 - 1$ であること、および $x^{12} - 1$ が図 6.1.1 のように因数分解されることを確かめよ。

2 **素数の 2 倍。** p が奇素数ならば $C_{2p}(x) = C_p(-x)$ であることを示せ。$p = 3$ の場合にこれを確かめよ。

3 **トーシェント関数。** 素数 p に対して $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ であること、および $C_{p^k}(x) = C_p\left(x^{p^{k-1}}\right)$ であることを示せ。これを用いて C_9 を求めよ。

4 **少し長い問題。** やや難 $x^{15} - 1 = C_1C_3C_5C_{15}$ を用いて、$C_{15}(x) = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$ であることを示せ。

さらに学ぶために

- **Ian Stewart, *Galois Theory***（CRC Press）。学部生向けの標準的な入門書（『ガロア理論』）。円分多項式と正多角形が早い段階で登場する。
- **Harold Davenport, *The Higher Arithmetic***（Cambridge University Press）。1 の冪根とその算術を扱っている（『高等算術』）。
- **Marcus du Sautoy, *Finding Moonshine***（Fourth Estate）。対称性と群論についての一般向けの読み物で、ガロアの物語も含まれている。

詳しい解説付きの解答は第 6.1 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch06/cyclotomic.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com