5.8 円板に隠れた距離

ワークシート

問題

STEP III 2013、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s3-q6

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　$|z-w| \le |z|+|w|$ は図からどのように導かれるか？（z と $-w$ をベクトルとして考えよ。）

段階 1 絶対値（modulus）を展開する

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう $|a|^2 = aa^*$ を用いよ。$|z-w|^2 = (z-w)(z^*-w^*)$ を展開し、$(|z|+|w|)^2$ と比較せよ。

手を止めて、やってみよう E が実数であるのはなぜか。$E \geq 0$ については、三角不等式（triangle inequality）を用いよ。

段階 2　2 つ目の恒等式（identity）

扱う内容：小問 (ii)

? **考えてみよう**　$|1 - zw^*|^2$ も同様に展開せよ。

段階 3 不等式（inequality）

扱う内容：最後の不等式と、$|z|<1, |w|<1$ の場合

考えてみよう $A=(|z|+|w|)^2, B=(1+|zw|)^2$ とおく。小問 (i) と (ii) より、示すべき不等式を 2 乗したものは $\frac{A-E}{B-E} \le \frac{A}{B}$ となる。これはどのようなときに成り立つか。

手を止めて、やってみよう $1+|z||w|-|z|-|w|$ を因数分解（factorise）せよ。これが 0 以上になるのはどのようなときか。その条件は $|z|<1$ かつ $|w|<1$ の場合も含んでいるか。

背後にある数学

非ユークリッド幾何学

二千年もの間、数学者たちはユークリッドの第 5 公準（直線上にない点を通り、その直線に平行な直線はちょうど 1 本存在する）を、ほかの公理から証明しようと試みてきた。1820 年代から 1830 年代にかけて、ロバチェフスキー（Nikolai Lobachevsky）、ボヤイ（János Bolyai）、そして（公表はしなかったが）ガウス（Gauss）は、それが

不可能であることに気づいた。平行線が無数に存在する、完全に無矛盾な幾何学があるのである。1882 年、ポアンカレ（Henri Poincaré）は単位円板の内部にその美しいモデルを見いだした。点は開円板の点であり、「直線」は直径、および境界の円と直角に交わる円弧である。そして z と w の距離は

$$d(z,w) = 2\tanh^{-1}\rho(z,w), \qquad \text{ただし} \qquad \rho(z,w) = \frac{|z-w|}{|1-zw^*|}.$$

である。点が境界の円に近づくにつれて、中心からの距離は無限大に発散する。この円板は、ゆがんだレンズを通して見た無限に広がる平面全体なのである。

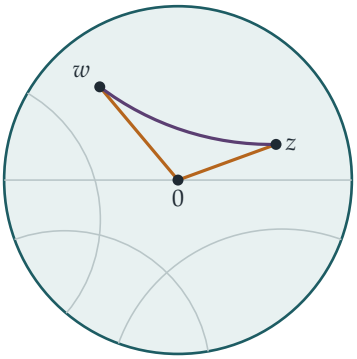

図 5.8.1　ポアンカレ円板。双曲的な「直線」は、直径、または境界と直角に交わる円の弧である（灰色）。頂点が 0、z、w の双曲三角形は、2 辺が直径に沿い（琥珀色）、1 辺が円弧に沿っている（紫色）。問題の不等式は、紫色の辺の双曲的な長さが、他の 2 辺の長さの和を超えないことを述べている。

姿を変えた三角不等式

$|z|, |w| < 1$ の場合に、この問題が何を証明したのかを見てみよう。$|z| = \tanh a$、$|w| = \tanh b$ とおくと、0 から z および w までの双曲的距離は $2a$ と $2b$ である。すると Section 3.8 の tanh の加法定理により、

$$\frac{|z|+|w|}{1+|zw|} = \frac{\tanh a + \tanh b}{1+\tanh a \tanh b} = \tanh(a+b).$$

よって、この不等式は $\tanh\left(\frac{1}{2}d(z,w)\right) \le \tanh(a+b)$、すなわち

$$d(z,w) \le 2a + 2b = d(z,0) + d(0,w).$$

を意味する。これは双曲的距離に関する三角不等式である（図 5.8.1）。相対論的な速度の合成公式と双曲幾何学は、実は同じものである。特殊相対性理論で可能な速度全体の集合は、適切な距離の概念を与えると、双曲空間**そのもの**になる。この話題には Section 7.6 で再び戻る。

円板の対称性

なぜ ρ が適切な量なのだろうか？$|a| < 1$ に対して、写像 $z \mapsto \dfrac{z - a}{1 - a^{*}z}$ は単位円板をそれ自身に写し、双曲的距離を保ち、a を中心に移す。これらは平行移動の双曲幾何学における類似物であり、$\rho(z, w)$ は、w を中心に移したときのちょうど $|$移動後の$z|$ に等しい。これらの**メビウス変換**（Möbius transformations）は、複素解析の中心的な話題である。エッシャー（M. C. Escher）の木版画 *Circle Limit*（『円の極限』）は、数学者コクセター（H. S. M. Coxeter）の図に着想を得たもので、合同な魚や天使によるポアンカレ円板の敷き詰めを描いている。双曲的距離は縁の近くで発散するため、それらの図形は縁に向かって小さくなっていく。

次の一歩

1. **数値による確認。** $z = \frac{1}{2}$、$w = -\frac{1}{2}$ とする。不等式の両辺を計算せよ。次に双曲的距離 $d(z, 0)$、$d(0, w)$、$d(z, w)$ を計算し、この場合は三角不等式で等号が成り立つことを確かめよ。それはなぜか？

2. **混合した場合。** $|z| < 1 < |w|$ であって、不等式が成り立たないような z、w を求めよ。

3. **等長変換（isometry）。** $|a| < 1$ として $f(z) = \dfrac{z - a}{1 - a^{*}z}$ とする。$|z| = 1$ ならば $|f(z)| = 1$ であること、および $f(a) = 0$ であることを示せ。また $\rho(f(z), f(w)) = \rho(z, w)$ を示せ。

4. **無限遠は近い。** 0 から r（$0 < r < 1$）までの双曲的距離が $\ln \frac{1+r}{1-r}$ であり、$r \to 1$ のとき無限大に発散することを示せ。中心からの双曲的距離が 10 であるためには、点は境界にどれほど近くなければならないか？

さらに学ぶために

- **Caroline Series、「Hyperbolic geometry」講義ノート**（ウォーリック大学、無料で公開）。ポアンカレ円板から始まる、わかりやすい入門講義。
- **Jeremy Gray, *Ideas of Space***（Oxford University Press）。ユークリッドからアインシュタイン（Einstein）に至る非ユークリッド幾何学の歴史。
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。第 6 章で非ユークリッド幾何学とメビウス変換を、美しい図とともに扱っている。

詳しい解説付きの解答は第 5.8 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/poincare-disc.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com