5.7 写像としての複素指数関数

ワークシート

問題

STEP II 1997、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/97-s2-q5

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　$z = e^{u}(\cos v + \mathrm{i}\sin v)$ の絶対値（modulus）と偏角（argument）を u と v で表すとどうなるか。

段階 1 $e^w = \mathrm{i}e$ を解く

扱う内容：$z = \mathrm{i}e$ のときの w を求める

考えてみよう $z = e^u(\cos v + \mathrm{i}\sin v)$ の絶対値（modulus）と偏角（argument）を u と v を用いて表すとどうなるか。

手を止めて、やってみよう $\mathrm{i}e$ の絶対値と偏角は何か。解はいくつあるか。

段階 2　格子線の像

扱う内容：直線 $u=$ 一定および $v=$ 一定の像

考えてみよう　直線 $u=c$ 上では、何が一定で何が変化するか。直線 $v=d$ 上ではどうか。

段階 3　一対一となる部分

扱う内容：2 組の部分集合

考えてみよう　第 1 象限に写される点 w はどれか。その集合が第 1 象限と一対一に対応する（one-to-one correspondence）には大きすぎるのはなぜか。

手を止めて、やってみよう　$0 < |z| < 1$ の場合、u はどのような値が必要か。すべての偏角がちょうど 1 回ずつとられなければならないので、v の区間の長さはいくらであるべきか。また、区間のどちらの端点を含めるべきか。

背後にある数学

複素対数関数

実数直線上では、ln は exp の逆関数である。複素平面では、各 $z \neq 0$ に対して $e^w = z$ は $2\pi\mathrm{i}$ の整数倍ずつ異なる無限個の解 w をもつので、「$\log z$」は一つの数ではない。本当の関数を得るには**分枝**（branch）を選ばなければならない。これは W_3 や W_4 のような帯状領域を選ぶことである。**主枝**（principal branch）は $-\pi < \arg z \leq \pi$ をとるものである。どの分枝にも、原点から伸びる半直線に沿ってどこかに不連続な跳び

があり、これを**分枝切断**（branch cut）という。リーマン（Bernhard Riemann）は 1851 年の学位論文において、対数関数が平面上に住むと考えるのをやめることでこの問題を解決した。対数関数は無限に続くらせん階段、すなわち**リーマン面**（Riemann surface）の上に住み、その上では一価かつ滑らかなのである。リーマン面は今日、幾何学、整数論、弦理論の中心をなしている。

角は保たれる

図 5.7.1（オンライン版の節全体を参照）をもう一度見てみよう。鉛直と水平の格子線は直角に交わり、それらが移った先の円と半直線も直角に交わっている。これは偶然ではない。複素関数は、導関数が 0 でないところではどこでも、曲線どうしのなす角を保つのである。このような写像を**等角写像**（conformal map）という。局所的には、等角写像は回転と拡大縮小にすぎず、それはまさに複素数 $f'(z)$ を掛けることが行う操作である。等角写像は、複雑な領域を答えのわかっている単純な領域に変換することで、流体の流れ、静電気学、熱伝導の問題を解くのに用いられる。

メルカトルの地図

ここで、この節と Section 4.8 を結ぶ意外な事実を紹介しよう。1569 年のメルカトル（Gerardus Mercator）の地図は、一定の方位角で進む航路が直線になるように作られており、そのためには角を保つ必要がある。まず地球を（北極から）立体射影（stereographic projection）で平面に写し、次に複素対数をとると、その結果はちょうどメルカトル図法になる。log によって半直線と円がそれぞれ水平と鉛直の直線になるのと同じように、経線は鉛直な直線に、緯線は水平な直線になるのである。この節の指数写像を逆向きにたどったものが、航海士の海図の数学なのである。

次の一歩

1. **方程式を解く。** $e^w = -1$ を満たす複素数 w をすべて求めよ。また、$e^w = 1 + \mathrm{i}$ を満たす w をすべて求めよ。

2. **正方形の像。** 頂点が $0, 1, 1+\mathrm{i}, \mathrm{i}$ である正方形の $z = e^w$ による像を求め、図示せよ。

3. **直角。** 円 $|z| = e^c$ と半直線 $\arg z = d$ が直角に交わることを直接示し、これが直線 $u = c$ と $v = d$ が垂直であることと整合する理由を説明せよ。

4. **2 乗。** c と d を 0 でない実数とする。写像 $z \mapsto z^2$ による直線 $x = c$ と $y = d$ の像を求めよ。それらが放物線であり、交わる点ではどこでも直角に交わることを示せ。（$c = 0$ または $d = 0$ のときはどうなるか。）

さらに学ぶために

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*** (Oxford University Press)。第 2 章と第 4 章で、指数関数、対数関数、等角写像を見事な図とともに扱っている。
- **Hilary Priestley, *Introduction to Complex Analysis*** (Oxford University Press)。大学初年級向けのわかりやすい教科書である。
- **Ian Stewart & David Tall, *Complex Analysis*** (Cambridge University Press)。幾何学に重点を置いた、もう一つの優れた大学向け入門書である。

詳しい解説付きの解答は第 5.7 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/complex-exponential.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com