5.6 フェルマー点

ワークシート

問題

STEP III 2000、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s3-q3

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　A、B、C はどこにあるか。それぞれの偏角はいくらか。OA、OB、OC は互いにどのような角をなすか。

段階 1 鍵となる恒等式

扱う内容：恒等式

考えてみよう α^3 はいくつか。z^3+1 を因数分解し、$\alpha \neq -1$ であることを用いよ。

考えてみよう A、B、C はどこにあるか。それぞれの偏角（argument）を求めよ。

段階 2　回転としての正三角形

扱う内容：頂点 N、L、M

考えてみよう　三角形 CAN は時計回りに頂点名を付けた正三角形（equilateral triangle）である。C に立ったとき、A から N へはどのように移ればよいか。$N-C$ を $A-C$ を用いて表せ。

手を止めて、やってみよう　時計回りに 60° 回転することは、$e^{-\mathrm{i}\pi/3}$ を掛けることである。これを α を用いて表し、同様にして L と M を求め、恒等式を使って簡単にせよ。

段階 3 原点を通る 3 本の直線

扱う内容：3 本の直線

> **手を止めて、やってみよう** L と C を比べよ。どちらも同じ複素数の実数倍になっている。それぞれの倍数の符号から何がわかるか。M と A、N と B についても同様に考えよ。

背後にある数学

フェルマー点で距離の和が最小になる理由

なぜ $PA + PB + PC$ は、各辺が 120° の角をなして見える点で最小になるのだろうか。ここに見事な論法がある。図全体を B のまわりに 60° 回転させ、A を L'（AB 上に作った正三角形の頂点）に、P を P' に移す。三角形 BPP' は正三角形であるから $PB = PP'$ であり、また $PA = P'L'$ である。よって $PA + PB + PC = L'P' + P'P + PC$ となり、これは L' から C へ至る折れ線の長さである。これは $|L'C|$ 以上であり、等号が成り立つのは折れ線がまっすぐなとき、すなわち P における角がすべて 120° のときに限る。したがって総延長の最小値は、問題で求めたとおり $|LC| = p + q + r$ である。（これは三角形のどの角も 120° より小さい場合に成り立つ。そうでない場合、最小となるのは鈍角（obtuse angle）の頂点である。）

石けん膜とシュタイナー木

3 本の杭（A、B、C を表す）をつけた枠を石けん水に浸すと、石けん膜は表面張力（surface tension）によるエネルギーを最小にしようとして、フェルマー点で 120° の角をなして交わる 3 枚の膜を作る。点の数がもっと多い場合、それらを結ぶ最短のネットワークは**シュタイナー木**（Steiner tree）であり、3 本の辺が 120° で交わる分岐点が新たに加わる。シュタイナー木を求めることは一般には計算量的に難しい（NP 困難

（NP-hard）な問題である）が、道路網やパイプライン、コンピュータチップの配線の設計など、実用上重要である。

ナポレオンの定理

同じ配置には、もうひとつの宝石が隠れている。任意の三角形の各辺の上に作った 3 つの正三角形の**中心**は、正三角形をなすのである。これは伝統的にナポレオン・ボナパルト（Napoleon Bonaparte、熱心なアマチュア数学者であった）の功績とされ、ナポレオンの定理（Napoleon's theorem）と呼ばれるが、彼が発見したという証拠はない。この定理も、$1 + \alpha^2 = \alpha$ を用いれば複素数で短く証明できる。

次の一歩

1. **頂点の名前のつけ方を確かめる。**正三角形の頂点を反時計回りに名づけた（内側に作った）場合、3 本の直線は一般には O を通らないことを示せ。

2. **ナポレオンの定理。**正三角形 ABL の中心が $\frac{1}{3}(A + B + L)$ であることを示せ。上で求めた式を用いて、3 つの中心が正三角形をなすことを示せ。

3. **最小値。**$p = 2$、$q = 1.4$、$r = 1.1$ のとき、P を各頂点および重心（centroid）$\frac{1}{3}(A + B + C)$ に置いて $PA + PB + PC$ を計算し、いずれも 4.5 より大きいことを確かめよ。

4. **正三角形の判定。**z_1、z_2、z_3 が（どちらの向きであれ）正三角形をなすための必要十分条件は $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$ であることを示せ。

さらに学ぶために

- **Richard Courant & Herbert Robbins, *What Is Mathematics?***（Oxford University Press）。邦題『数学とは何か』。第 7 章でフェルマー点、シュタイナー木、石けん膜を論じている。
- **Liang-shin Hahn, *Complex Numbers and Geometry***（Mathematical Association of America）。多くの幾何の定理を、まさにこの水準の複素数を用いて証明している。
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。邦題『ヴィジュアル複素解析』。第 1 章にナポレオンの定理をはじめとする幾何の結果が収められている。

詳しい解説付きの解答は第 5.6 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/fermat-point.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com