5.5 有理角になりそうでならない角

ワークシート

問題

STEP III 2022、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　θ が有理数であり、たとえば $\theta = \frac{p}{q}$ 度であったとする。$\sin(k\theta) = 0$ となる正の整数 k を求めよ。

段階 1　倍角公式（multiple-angle formulas）

扱う内容：小問 (i)

手を止めて、やってみよう　$\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k$ と書き、$\cos^k\theta$ をくくり出す。$(1 + \mathrm{i}\tan\theta)^k$ を展開し、虚部（imaginary part）と実部（real part）をとる。次に $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ を用いる。

段階 2 偶奇（parity）

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう $\sec\theta = a$（奇数）のとき、$\sec^2\theta - 1$ は奇数か、それとも偶数か？

手を止めて、やってみよう $\sin(k\theta) = 0$ を満たす最小の k をとる。すると、正弦の公式に現れる括弧の中は 0 でなければならない。なぜそれによって k が偶数であることが導かれるのか？そのうえで $\sin k\theta = 2\sin\frac{k\theta}{2}\cos\frac{k\theta}{2}$ を用いる。

段階 3　矛盾（contradiction）

扱う内容：小問 (ii)

> **手を止めて、やってみよう**　$m = \frac{k}{2}$ として余弦の公式を適用する。なぜ括弧の中は決して 0 にならないのか？

段階 4　余接（cotangent）による形

扱う内容：小問 (iii)

> **考えてみよう**　$\cot\phi = \frac{1}{b}$ ならば、$\sec^2\phi - 1$ はいくらか？それは偶数か？そのうえで同じ議論を行う。

背後にある数学

無理数回転

θ の度数が有理数なら、θ ずつ回転を繰り返すと、いずれ出発点に戻ってくる。θ が無理数なら決して戻らず、しかも驚くべきことが起こる。点 $k\theta$（360° を法として考える）は円周上に**一様に**広がり、どんな角にもいくらでも近づくのである。これは

一様分布定理（equidistribution theorem）であり、1910 年ごろにワイル（Hermann Weyl）、シェルピンスキ（Wacław Sierpiński）、Piers Bohl によってそれぞれ独立に証明された。図 5.5.1 は $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ の最初の 40 個の倍数を示している。すでに円周を埋めつつあり、どれ一つとして重ならない。

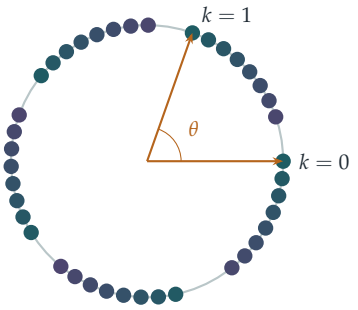

図 5.5.1　$k = 0, 1, \ldots, 39$ に対する角 $k\theta$ の点。ただし $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 70.53°$ である（k が増えるにつれて色がティールからプラムへ変化する）。θ が無理数なので、どの点も二度と重ならず、点は円周全体に一様に広がっていく。

ヒルベルトの第 3 問題

1900 年、ヒルベルトは新しい世紀に向けて 23 の問題を挙げた。その第 3 問題は次のようなものである：体積の等しい二つの多面体があるとき、一方をつねに有限個の多面体の断片に切り分けて、もう一方に組み立て直すことができるか。（平面上の多角形については答えは「できる」であり、これはウォレス–ボヤイ–ゲルヴィンの定理（Wallace–Bolyai–Gerwien theorem）である。）1 年もたたないうちに、ヒルベルトの学生であったデーン（Max Dehn）は答えが**否**であることを示した。正四面体を切り分けて、同じ体積の立方体に組み立て直すことはできないのである。デーンの証明では、各多面体にその辺の長さと二面角（dihedral angle）から作られる量を対応させる。この量は現在**デーン不変量**（Dehn invariant）と呼ばれ、切り分けて組み立て直しても変わらない。立方体ではこれは 0 であり、正四面体では 0 でない。それはまさに、二面角 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ が $180°$ の有理数倍でないからである。そしてそれこそが、この問題で証明したことなのである。

ニーヴンの定理

この話はどこまで広がるのだろうか。1956 年、ニーヴン（Ivan Niven）は、θ の度数が有理数で $\cos\theta$ も有理数ならば、$\cos\theta$ は $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ のいずれかであることを証明した。したがって、余弦が有理数となる「きれいな」角は $0°, 60°, 90°, 120°, 180°$ とその仲間だけである。証明では、$2\cos\theta$ が整数係数のモニック多項式（monic polynomial）

の根、すなわち**代数的整数**（algebraic integer）であるという事実を用いる。これは Section 1.3 の終わりで触れた考え方である。

次の一歩

1 **正四面体。**正四面体の二つの面のなす角が $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ であること、およびメタン分子の二つの結合のなす角（正四面体の中心から二つの頂点へ向かう線分のなす角）が $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$ であることを示せ。

2 **3–4–5 の三角形。**3–4–5 の三角形の最小の角の度数が無理数であることを示せ。（ヒント：その角は $\cot^{-1}\frac{4}{3}$ である。上の議論を修正するか、ガウス整数（Gaussian integer）$4+3\mathrm{i}$ の累乗を考え、どれも実数にならないことを示せ。）

3 **なぜ a は奇数なのか。**$a=2$ のとき、議論のどこが破綻するか。$\cos^{-1}\frac{1}{2}$ は有理数か。

4 **小さな場合のニーヴンの定理。**0° から 90° までの整数の度数 θ で、$\cos\theta$ が有理数となるものをすべて求め、その一覧がニーヴンの定理と一致することを確かめよ。

さらに学ぶために

- **Ivan Niven, *Irrational Numbers***（Mathematical Association of America）。『無理数』。三角関数の有理数値に関するニーヴンの定理を収録している。
- **Martin Aigner & Günter Ziegler, *Proofs from THE BOOK***、ヒルベルトの第 3 問題の章。『天書の証明』。デーンによる解決の美しい解説である。
- **Benjamin Yandell, *The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers***（A. K. Peters）。ヒルベルトの問題とそれを解いた人々。23 の問題すべての背後にある物語を描いている。

詳しい解説付きの解答は第 5.5 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/rational-angles.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com