5.4 正多角形の中の距離

ワークシート

問題

STEP III 2016、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/16-s3-q7

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　多角形の頂点を n 乗して 1 になる複素数、すなわち $X_k = \omega^k$ に置く。点 P が z であるとき、$|PX_k|$ を z で表すとどうなるか。すると、すべての距離の積はどうなるか。

段階 1　因数分解（factorisation）

扱う内容：因数分解

? **考えてみよう**　なぜ各 ω^k は $z^n - 1$ の根（root）になるのか。また、なぜそれらで根がすべて尽くされるのか。

段階 2 垂直二等分線（perpendicular bisector）上の点

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう 頂点（vertex）を $X_k = \omega^k$ にとる。P が点 z であれば、$|PX_k| = |z - \omega^k|$ である。すべての距離の積はどうなるか。

手を止めて、やってみよう X_0 と X_1 から等距離にある点は、O を通る直線上にある。t を実数として、P を $z = te^{i\pi/n}$ と表せ。z^n は何になるか。

考えてみよう n が奇数のときは、$t > 0$ と $t < 0$ の場合を分けて考えよ。それぞれの場合は幾何学的に何を意味するか。

段階 3　頂点から引いた弦（chord）

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう　今度は $P = X_0$ であり、距離の一つが 0 になるので、$|z^n - 1|$ は役に立たない。$\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ を根にもち、1 を根にもたない多項式（polynomial）はどれか。

手を止めて、やってみよう　その多項式を $1 + z + \cdots + z^{n-1}$ と書き、$z = 1$ を代入せよ。

背後にある数学

コーツの定理

小問 (i) はロジャー・コーツ（Roger Cotes）の定理である。コーツはケンブリッジの才気あふれる若き数学者で、ニュートン（Newton）の『*Principia*』（プリンキピア）第 2 版を編集し、1716 年に三十三歳で亡くなった（ニュートンは「彼が生きていたなら、我々は何事かを知りえたであろう」と述べた）。コーツは、P が O から正 n 角形の頂点を通る半直線上にあるとき、P から各頂点までの距離の積は $||OP|^n - 1|$ であ

り、P が辺の中点を通る半直線上にあるときは $|OP|^n + 1$ であることを発見した。彼はこれを用いて、複素数を使わずに $x^n \pm 1$ を実数係数の 2 次式の積に因数分解した。これは有理関数の積分に必要だったのである。この定理は彼の死後、1722 年に出版された。

正弦の積

$|1 - \omega^k| = |e^{-\mathrm{i}\pi k/n} - e^{\mathrm{i}\pi k/n}| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$ であるから、小問 (ii) は

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

を意味する。これは Section 5.3 の余弦の積と対をなすものである。関連する積から $z^n - 1$ の**判別式**（discriminant）が得られる。すなわち、相異なる n 乗して 1 になる複素数のすべての組の間の距離の 2 乗の積は n^n である。判別式は多項式の根がどれだけ離れているかを測るもので、多項式の代数や数体の代数において中心的な役割を果たす。これについては第 6 章で取り上げる。

静電気学と等間隔配置

物理的な解釈もある。円周上に n 個の等しい電荷を置く。ポテンシャルエネルギー（2 次元静電気学の対数ポテンシャルによる）を最小にする配置は正多角形であり、そのエネルギーにはまさに $\sum \ln|X_jX_k|$、すなわち距離の積の対数が現れる。「できるだけ散らばった」点は、数値解析（Section 3.6 。そこでは最良の補間点が正多角形から $x = \cos\theta$ によって得られる）やランダム行列の理論において重要である。

次の一歩

1. **小さな場合を確かめる。** 正方形（$n = 4$）と正三角形（$n = 3$）について、小問 (ii) を直接確かめよ。

2. **頂点を通る場合。** P が O から X_0 を通る半直線上にあるとき、$|PX_0| \times \cdots \times |PX_{n-1}| = ||OP|^n - 1|$ であることを示せ。

3. **平均距離。** 小問 (ii) と Section 3.2 の相加相乗平均の不等式（AM–GM inequality）を用いて、X_0 から引いた $n-1$ 本の弦の長さの平均が $n^{1/(n-1)}$ 以上であることを示せ。$n = 6$ のときの実際の平均 $\frac{1}{n-1}\sum_{k} 2\sin\frac{k\pi}{n}$ を求め、比較せよ。

4. **すべての弦。** やや難 単位円に内接する正 n 角形の $\binom{n}{2}$ 本の弦すべての長さの積が $n^{n/2}$ であることを示せ。

さらに学ぶために

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*** (Oxford University Press)。複素数を用いた幾何を、美しい図版とともに解説している。
- **Ross Honsberger, *Mathematical Gems*** (Mathematical Association of America)。正多角形に関する優美な問題がいくつか収められている。
- **Ronald Gowing, *Roger Cotes: Natural Philosopher*** (Cambridge University Press)。コーツとその数学についての伝記である。

詳しい解説付きの解答は第 5.4 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/polygon-distances.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com