5.3 $z^{2n}+1$ の因数分解

ワークシート

問題

STEP III 2013、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s3-q4

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　$z^{2n} = -1$ の解は複素平面（complex plane）上のどこにあるか。$n = 2$ と $n = 4$ の場合について図示せよ。

段階 1　共役（conjugate）な対から実数係数の二次式（quadratic）が得られる

扱う内容：因数分解

考えてみよう　$(z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta})$ を展開し、中央の係数を簡単にせよ。

段階 2 因数分解（factorisation）

扱う内容：因数分解

手を止めて、やってみよう $z^{2n}=-1$ の $2n$ 個の解を共役な対 $e^{\pm i\theta_k}$ として書き並べよ。θ_k はどのような値か。また、なぜそれらで根（root）がすべて尽くされるのか。

段階3　$z=\mathrm{i}$ を代入する

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　$\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}\cos\theta+1$ はいくらか。また、n が偶数のとき $\mathrm{i}^{2n}+1$ はいくらか。

手を止めて、やってみよう　n が偶数のとき、$(-2\mathrm{i})^n$ を簡単にせよ。

段階 4　n が奇数のとき

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう　n が奇数のとき、角 θ_k のうちの一つは $\frac{\pi}{2}$ に等しい。それはどれか。また、そのために $z=\mathrm{i}$ の代入がこのままでは役に立たないのはなぜか。

手を止めて、やってみよう　因数分解の両辺を $1+z^2$ で割り、それから $z=\mathrm{i}$ とおけ。残った余弦を対にまとめよ。$\cos\theta_{n+1-k}$ と $\cos\theta_k$ にはどのような関係があるか。

背後にある数学

代数学の基本定理

$z^{2n}+1$ が $\mathbb{C}$ 上で一次因数の積に完全に因数分解できることは、**代数学の基本定理**（fundamental theorem of algebra）の特別な場合である。すなわち、複素数係数の定数でない多項式はすべて複素数の根をもち、したがって一次因数の積に完全に因数分解される。広く受け入れられた最初の証明は、ガウス（Gauss）が 1799 年の博士論

文で与えたものであり、彼はその後も何度かこの定理に立ち返って新たな証明を与えた。この定理の帰結として、実数係数の多項式はすべて実数係数の一次因数と二次因数の積に因数分解される。実数でない根は、段階 1 で見たとおり共役な組として現れるからである。この定理は名前こそ「代数学」だが、中身は解析学的である。どの証明も連続性など実数の何らかの性質を用いており、最も鮮やかな証明の一つを、複素解析（complex analysis）の最初の講義で目にすることになるだろう。

正弦と余弦の積

この方法からは、恒等式の一群が得られる。$z^{n}-1$ を $z^{2n}+1$ の代わりに用いると

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}},$$

が得られる。これは幾何学的な形で Section 5.4 において証明されている。このような恒等式は、振動系の解析（ばねでつながれた n 個の質点の振動数には $\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}$ が現れる）や、数え上げの問題（ある種のグラフの全域木（spanning tree）の個数や、長方形のドミノタイリング（domino tiling）の数は余弦の積で与えられる）に現れる。$m\times n$ の長方形のドミノタイリングの数に対するカステレイン（Kasteleyn）の 1961 年の公式は、$\cos^{2}\frac{j\pi}{m+1}$ と $\cos^{2}\frac{k\pi}{n+1}$ を含む式の二重積である。

次の一歩

---

1 **七角形にまつわる積。** 小問 (ii) で $n=7$ として、$\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}\cos\frac{5\pi}{14}=\frac{\sqrt{7}}{8}$ を示せ。次に、$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}$ を示せ。（**ヒント：** $\cos\theta=\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$ を使って角を関係づけるか、恒等式 $\sin 2x=2\sin x\cos x$ を繰り返し用いよ。）

2 **別の代入。** 因数分解に $z=1$ を代入して、

$$\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}=2^{\frac{1}{2}-n}.$$

を示せ。

3 **$z^{6}+1$ を因数分解する。** $z^{6}+1$ を実数係数の三つの二次式の積で表し、展開して答えを確かめよ。

4 **正弦。** $z^{2n}-1$ を同様に因数分解し、$z^{2}-1$ で割ることにより、

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

を示せ。

さらに学ぶために

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。第 2 章で 1 の冪根（roots of unity）と多項式を、美しい図とともに扱っている。
- **Benjamin Fine & Gerhard Rosenberger, *The Fundamental Theorem of Algebra***（Springer）。解析学、代数学、位相幾何学によるこの定理のいくつかの証明を、学部生向けに解説している。
- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale***（Princeton University Press）。$\sqrt{-1}$ の歴史。1 の冪根とその応用も扱っている。

詳しい解説付きの解答は第 5.3 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/z2n-plus-one.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com