5.2 1 の累乗根によるフィルター

ワークシート

問題

STEP I 1990、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s1-q2

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　ω は $z^3 - 1 = 0$ の解である。$z^3 - 1$ を因数分解せよ。そこからなぜ $1 + \omega + \omega^2 = 0$ が得られるのか。

段階 1　絶対値と偏角

扱う内容：1 の 3 乗根

考えてみよう　$1 + \omega + \omega^2 = 0$ から、$1 + \omega^2$ と $1 + \omega$ を、符号を除いて ω の 1 つの累乗として表せ。それらの絶対値（modulus）と偏角（argument）はいくらか。

段階 2 フィルター

扱う内容：恒等式

考えてみよう k が 3 の倍数のとき、$1+\omega^k+\omega^{2k}$ はいくらか。3 の倍数でないときはどうか。

手を止めて、やってみよう $r=1,2,3$ について $(1+\omega^r)^n$ を足し合わせ、それぞれを二項定理（binomial theorem）で展開せよ。次に、求めた絶対値と偏角を用いて同じ和を計算せよ。

段階 3　2 つの計算

扱う内容：$n = 25$ の場合と 2 つ目の和

考えてみよう　$n = 25$ のとき：$\frac{25\pi}{3}$ に近い 2π の倍数はどれか。

手を止めて、やってみよう　2 つ目の和では、3 で割った余りが 2 となる位置 k が必要である。代わりにそれらの k を取り出すには、フィルターをどのようにずらせばよいか。

背後にある数学

離散フーリエ変換

3 を任意の N に、ω を $e^{2\pi \mathrm{i}/N}$ に置き換える。数の列 $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ に対して、数

$$\hat{a}_r = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \, \omega^{rk}$$

はその**離散フーリエ変換**をなし、フィルターの恒等式 $\sum_r \omega^{rk} = N$ または 0 のおかげで、$\hat{a}_r$ から a_k を復元することができる。この変換は信号をその構成周波数に分

解する。1965 年、James Cooley と John Tukey は、これを N^2 ステップではなくおよそ $N \log_2 N$ ステップで計算する方法、すなわち**高速フーリエ変換**（fast Fourier transform）を発表した。ガウス（Gauss）は 1805 年に本質的に同じ考えを見出していたが、公表することはなかった。FFT は音声・画像の圧縮（MP3 や JPEG）、携帯電話の信号、医療用スキャナー、巨大な数の乗算などに用いられており、しばしば 20 世紀で最も重要なアルゴリズムの一つに数えられる。

母関数

このフィルターは、より大きな考え方の一例である。数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ は、多項式またはべき級数（power series）$A(x) = \sum a_k x^k$、すなわちその**母関数**（generating function）としてまとめることができ、数列に対する操作は関数に対する操作になる。1 での値をとれば数列の和が得られ、1 の冪根での値をとれば剰余類（residue class）が取り出され、微分すれば各項に k の重みが付く。これにより多くの数え上げの問題が代数の問題に変わり、第 9 章では中心的な手法となる。同じフィルターを 5 乗根を用いて $(1+x)^n$ に適用すると、正五角形や黄金比（golden ratio）とのつながりが見えてくる。1 の冪根の代数については Section 6.1 でさらに追究する。

次の一歩

1. **偶数番目。** 1 の平方根（1 と -1）によるフィルターを用いて、$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$ を示せ。

2. **残りの剰余。** $\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots$ の公式を求め、三つの公式の和が 2^n になることを確かめよ。

3. **4 つおき。** i を用いて、$\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots = \frac{1}{4}\left(2^n + 2^{n/2+1} \cos \frac{n\pi}{4}\right)$ を示せ。

4. **割り切れる条件。** $\{1, 2, \ldots, 12\}$ の部分集合のうち、要素の個数が 3 で割り切れるものはいくつあるか。要素の和が 3 で割り切れるものはいくつあるか。（**後者のヒント：** $\prod_{j=1}^{12}(1 + x^j)$ を 1 の 3 乗根で考えよ。）

さらに学ぶために

- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology***（A. K. Peters；オンラインで無料公開）。母関数への楽しい入門書であり、1 の冪根フィルターは早い段階で登場する。
- **Arthur Benjamin & Jennifer Quinn, *Proofs That Really Count***（Mathematical Association of America）。二項係数の恒等式を数え上げによって証明する。

- **T. W. Körner, *Fourier Analysis***（Cambridge University Press）。離散フーリエ変換と FFT を扱っている。

詳しい解説付きの解答は第 5.2 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/roots-filter.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com