5.1 マチンの公式

ワークシート

問題

STEP III 1987、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/87-s3-q3

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　$5-\mathrm{i}$ の偏角は何か。$1+\mathrm{i}$ の偏角はどうか。複素数を掛け合わせると、偏角はどうなるか。

段階 1 絶対値の評価

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう 上界（upper bound）については、両辺を 2 乗せよ。両辺とも非負である。

手を止めて、やってみよう 下界（lower bound）については、$|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha$ を $(|x|, |y|)$ と単位ベクトル（unit vector）の内積（dot product）とみなせ。内積はどこまで大きくなりうるか。

段階 2　鍵となる掛け算

扱う内容：小問 (ii)、第 1 の公式

考えてみよう　複素数（complex number）を掛け合わせると、偏角（argument）は足し合わされる。$5-\mathrm{i}$ と $1+\mathrm{i}$ の偏角はそれぞれ何か。そのうえで、$(5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i})$ を一歩ずつ計算せよ。

手を止めて、やってみよう　得られた答えの偏角は何か。小問 (i) を用いるか、角の大きさを考えることで、2π の余分な整数倍が加わらないことを示せ。

段階 3 第 2 の公式

扱う内容：小問 (ii)、第 2 の公式

考えてみよう 同様に考えると、偏角が $3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{20}+\tan^{-1}\frac{1}{1985}$ となる複素数の積はどれか。それを展開して計算せよ。

背後にある数学

手計算で π を求める

マチンの公式はなぜ計算にこれほど適しているのだろうか。級数 $\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$ は $|x|\le 1$ で収束するが、$x=1$ では収束が非常に遅い。$\frac{\pi}{4}$ を小数点以下 3 桁求めるだけでも、$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots$ をおよそ 1000 項とる必要がある。$x=\frac{1}{5}$ とすると、各項は前の項のおよそ 25 分の 1 になり、1 項あたりおよそ 1.4 桁ずつ精度が上がる。$x=\frac{1}{239}$ なら、1 項あたりおよそ 4.8 桁である。マチンの 100 桁は、1 つ目の級数をわずか約 70 項、2 つ目の級数を約 20 項とるだけで得られた。1873 年、William Shanks はマチン型の公式を用いて 707 桁を計算し、その計算に何年も費やした。ところが 1944 年に、彼が小数第 528 位で誤りを犯しており、それ以降の桁がすべて間違っていたことが判明した。

再びガウス整数

a, b を整数として $a+b\mathrm{i}$ の形に表される数は、Section 1.6 で扱った**ガウス整数**（Gaussian integers）である。$5-\mathrm{i}$ がこれほどうまく働く理由は、ある因数分解（factorisation）にある。$239^2+1=57122=2\times 13^4$ であり、これをガウス整数の中で書くと $(239+\mathrm{i})(239-\mathrm{i})=(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})\,(3+2\mathrm{i})^4(3-2\mathrm{i})^4$ となる。そして $5-\mathrm{i}=(1-\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})$ は、これと同じガウス素数（Gaussian primes）からできている。マチン型の公式を見つけることは、実は n^2+1 の形の数を因数分解する問題なのである。1899 年、Carl Størmer はまさに

この考え方を用いて、a, b, m, n を整数とする $\frac{\pi}{4} = a\tan^{-1}\frac{1}{m} + b\tan^{-1}\frac{1}{n}$ の形の公式は 4 つしかないことを証明した。それはマチンの公式と、オイラー（Euler）、Hermann、Hutton がそれぞれ見つけた 3 つの公式である。

回転

絶対値 1 の複素数を掛けることは、平面の回転（rotation）である。だからこそ複素数は、この章の後半で扱う幾何学から、電気工学における交流、量子力学の波動関数に至るまで、回転や角度が関わるあらゆるものにとって自然な言語となっている。Section 4.2 では $\tan^{-1}$ の加法定理（addition formula）が巧妙な置換から得られたが、ここでは複素数の掛け算から得られる。この 2 つは、同じ事実を異なる側面から見たものである。

次の一歩

1. **いとこにあたる問題。** STEP II 2000、問 4（step.maths.org/questions/00-s2-q4）に挑戦してみよ。この節と同じ方法、すなわち複素数を掛け合わせて偏角を読み取る方法で、$\frac{\pi}{4}$ についての別の逆正接の公式を証明する問題である。

2. **オイラーの公式。** $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})$ を考えることにより、$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ を示せ。

3. **Hutton の公式。** $\frac{\pi}{4} = 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$ を示せ。

4. **何項必要か。** マチンの公式を用いて π を小数点以下 20 桁まで求めるには、それぞれの級数を何項とる必要があるか見積もれ。そのうえで、最初の数桁を電卓で実際に計算してみよ。

さらに学ぶために

- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM***（Wiley）。マチン型の公式の歴史も扱っている。
- **Jörg Arndt & Christoph Haenel, *Pi Unleashed***（Springer）。π を計算する新旧の方法を生き生きと紹介している。
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。複素数を幾何学的に捉えるための最良の本である。第 1 章では、掛け算を回転と拡大として扱っている。

詳しい解説付きの解答は第 5.1 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/machin.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com