4.9 ホールディッチの定理

ワークシート

問題

STEP III 2011、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s3-q5

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　最も簡単な場合に定理を確かめよ。C が半径 R の円であるとき、P はどのような曲線を描くか。また、環状の領域の面積はいくらか。

段階 1　座標から面積を求める

扱う内容：面積の公式（area formula）

? **考えてみよう**　$x = r\cos\theta,\, y = r\sin\theta$ とし、これらはすべて t の関数であるとする。$\dot{x}$ と $\dot{y}$ を求め、$x\dot{y} - y\dot{x}$ を計算せよ。

段階 2 棒の両端

扱う内容：A と B の座標

考えてみよう 棒（rod）は、A から B に向かって $(\cos t, \sin t)$ の方向を向いている。P は両端からそれぞれどれだけ離れているか。

段階 3　OA が掃く面積

扱う内容：OA が掃く面積（area swept）

考えてみよう　$(*)$ を A に適用せよ。$x_A\dot{y}_A - y_A\dot{x}_A$ を展開し、a のべきごとに項を整理せよ。

手を止めて、やってみよう　各項のまとまりを 0 から 2π まで積分せよ。$[B]$ については、B は A の式の a を何に置き換えたものとして表されるか。

段階 4　f を消去する

扱う内容：$\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の間の面積

> **手を止めて、やってみよう**　A と B はどちらも同じ曲線 $\mathcal{C}$ をちょうど 1 周する。このことから $[A]$ と $[B]$ について何がわかるか。それを用いて f を求めよ。

背後にある数学

グリーンの定理とプラニメータ

公式 $(*)$ は**グリーンの定理**（Green's theorem）の特別な場合である。グリーンの定理は、閉曲線に沿った積分と、その内部の領域上の積分とを結びつける。面積に関する形では、曲線で囲まれた面積は $\frac{1}{2}\oint(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$ であると述べており、これは境界を一周するだけで計算できる積分である。技術者たちはこれを**プラニメータ**（planimeter、面積計）として利用した。プラニメータは 19 世紀に発明された機械式の器具で（最も成功したのは Jakob Amsler による 1854 年の設計である）、地図や図面上の図形の境界を指針でなぞると、車輪が囲まれた面積を記録する。プラニメータは、デジタルな方法に取って代わられるまで、土地の面積の測定や、インジケータ線図から蒸気機関のする仕事を求める計算など、さまざまな用途に用いられた。Holditch の定理はこれと密接に関係しており、棒はプラニメータの腕のようなものである。

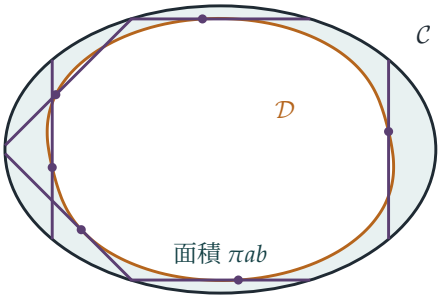

図 4.9.1　半軸の長さが 3 と 2 の楕円（ellipse）と、$a = 1$、$b = 1.5$ である長さ 2.5 の棒に対する Holditch の定理。棒のいくつかの位置（紫）を、点 P とともに示している。P が描く曲線 $\mathcal{D}$（琥珀色）は数値計算によって求めたものであり、二つの曲線にはさまれた網掛けの環状の領域の面積は、定理の予測どおり $4.7124\ldots = 1.5\pi$ である。

細かな条件

Holditch は条件にあまり注意を払わずに定理を述べたが、実際にはいくつかの条件が必要である。棒は両端を曲線上に保ったまま一周できなければならず、また描かれる曲線 $\mathcal{D}$ は一度だけなぞられる単純閉曲線（simple closed curve）でなければならない。$\mathcal{C}$ の幅に比べて棒が長すぎると、$\mathcal{D}$ は自分自身と交わることがあり、公式が与える「面積」は、ある領域を二重に、あるいは負の符号をつけて数えてしまう。この問題では、$\mathcal{D}$ が O を含む凸曲線であると仮定することで、こうした難点を避けている。定理が成り立つ条件を正確に突き止めることは、美しいアイデアをいかに厳密なものにしなければならないかを示すよい例であり、これは第 3 章のテーマでもある。

次の一歩

1 **楕円の面積。** $x = p\cos t$、$y = q\sin t$ として $(*)$ を用い、半軸の長さが p と q の楕円の面積が πpq であることを示せ。

2 **円の場合。** 方べきの定理を証明せよ。すなわち、円の二本の弦が P で交わるとき、それぞれの弦が分けられてできる二つの線分の長さの積は等しいことを示せ。これを用いて、円に対する Holditch の定理を導け。

3 **中点。** $f = \pi(a - b)$ から、P が棒の中点（midpoint）であるとき $f = 0$ となることを示せ。このとき、環状の領域の面積を棒の長さ L を用いて表せ。

4 **三角形。** やや難 頂点が $(0,0)$、(x_1, y_1)、(x_2, y_2) である三角形の境界をなぞることにより、$(*)$ を用いてその面積を求め、それが $\frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$ に等しいことを示せ。これは任意の多角形の面積を与える「靴ひも公式」（shoelace formula）の出発点

である。

さらに学ぶために

- **Mark Levi, *The Mathematical Mechanic***（Princeton University Press）。棒や車輪やばねを使った物理的な推論によって数学の結果を証明する本であり、この節の精神に通じる。
- **H. M. Schey, *Div, Grad, Curl, and All That***（Norton）。グリーンの定理を含む、ベクトル解析への気軽な入門書。
- **Hamnet Holditch,「Geometrical theorem」**, *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 2 (1858)。原論文。短い一段落だけのもので、細かな条件は一切書かれていない。

詳しい解説付きの解答は第 4.9 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/holditch.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com