4.8 球形のパンを切る

ワークシート

問題

STEP I 2001、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s1-q6

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　半径 a の球は、どの曲線を x 軸のまわりに回転させれば得られるか。その曲線について $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ はどうなるか。

段階 1 皮の面積の公式が簡単になる

扱う内容：皮の面積は切り身の枚数に比例する

考えてみよう x 軸のまわりに回転させると半径 a の球（sphere）になる曲線はどれか。その曲線について $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ は何か。

手を止めて、やってみよう その曲線について $y\sqrt{1+(y')^2}$ を計算せよ。驚くべきことが起こる。

段階 2　皮の面積は切り身の枚数に比例する

扱う内容：皮の面積は切り身の枚数に比例する

考えてみよう　では、厚さ h の切り身（slice）の皮（crust）の面積はいくらか。それは切り身の位置によるだろうか。

段階 3 皮が多いという条件

扱う内容：半径に関する条件

考えてみよう 問題のヒントに従い、端 $x = a$ の側から切り身を食べていき、残りが $x = -a$ から $x = -a + t$ までとなるようにせよ。V と A を求めよ。置換（substitution）$s = x + a$ が役に立つ。

手を止めて、やってみよう この規則は何枚の切り身を食べた後でも成り立たなければならないので、$0 < t \leq 2a$ を満たすすべての t について成り立つ必要がある。この範囲における $\frac{V}{A}$ の最大値は何か。

段階 4　問題の先へ：$2\frac{2}{3}$ で十分か

扱う内容：問題の先へ

考えてみよう　問われてはいないが、a に関する条件は十分条件でもあるだろうか。両端から切り身を食べる場合はどうなるか。

背後にある数学

アルキメデスの帽子箱定理

アルキメデスは『球と円柱について』（*On the Sphere and Cylinder*）において、二つの平行な平面に挟まれた球の帯の面積が、球に外接する円柱（cylinder）からその平面が切り取る帯の面積に等しいことを証明した（図 4.8.1）。我々の計算はまさにこの定理である。半径 a の円柱は単位長さあたり $2\pi a$ の耳の面積をもち、球も同じである。球全体をとると、その表面積（surface area）は円柱の側面積 $2\pi a \times 2a = 4\pi a^2$ に等しい。アルキメデスは、このことを、球の体積が円柱の体積の三分の二であるという事実とともに、自らの最高の業績とみなしていた。紀元前 75 年にシラクサを訪れたキケロ（Cicero）は、墓に刻まれた球と円柱を探すことで、草に覆われたその墓を見つけ出した。

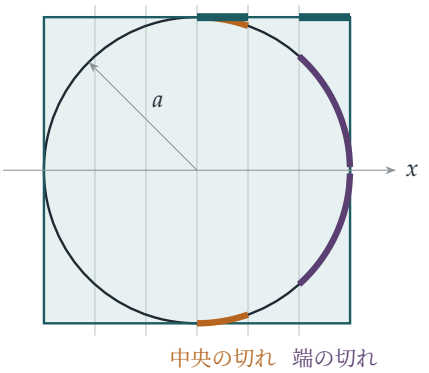

図 4.8.1　外接円柱の中に置かれた半径 a の球形のパンを等しい厚さの切れに切り分けたときの断面。中央の切れ（琥珀色）は、軸から遠く、短くほぼ水平な耳の弧をもつ。端の切れ（紫）は、軸に近く、長く急な耳の弧をもつ。x 軸のまわりに回転させると、どちらも対応する円柱の帯（青緑）とまったく同じ耳の面積、すなわち $2\pi a$ に厚さを掛けたものを与える。

地球の地図

帽子箱定理を使うと、面積を保つ地球の地図を描くことができる。地球儀上の各点を水平に外側へ外接円柱上に射影し、それから円柱を切り開いて平らにする。球の帯は同じ面積をもつ円柱の帯に写され、任意の領域についても同じことが成り立つ。これが**ランベルト（*Lambert*）正積円筒図法**（1772 年）である。極付近では形が大きくゆがむが、面積は正確である。これに対し、おなじみのメルカトル（Mercator）図法ではグリーンランドがアフリカと同じくらいの大きさに見える（実際には約十四分の一である）。ガウス（Gauss）の有名な定理である**驚異の定理**（*Theorema Egregium*、1827 年）は、球の地図で面積と形の両方を保つものは存在しないことを示している。地球の平面地図はどれも、何かをゆがめなければならないのである。

球面上の無作為な点

実用的な帰結を一つ紹介しよう。球面上の点を一様に無作為に選ぶには、緯度と経度を一様に選べばよいと考えるかもしれないが、そうすると点は極の付近に密集してしまう。帽子箱定理は正しい方法を与える。高さ x を $-a$ から a の間で一様に選び、経度を 0 から 2π の間で一様に選べばよい。面積は高さに比例するので、これはちょうど一様分布になる。物理学やコンピュータグラフィックスのシミュレーションでは、この方法が使われている。（驚くべきことに、これが成り立つのは三次元の場合だけである。四次元以上の球面についての対応する主張は成り立たない。）

次の一歩

1. **パン全体。** 切っていないパン全体について $V/A = \frac{a}{3}$ であることを示せ。問題の条件が $\frac{a}{3} < 1$ よりも満たしにくいのはなぜか。

2. **熱帯。** 地球の表面のうち、南緯 23.4° から北緯 23.4° の間にある部分の割合はいくらか。（地球を球とみなせ。面積は高さに比例するので、必要なのは $\sin 23.4°$ だけである。）

3. **他の形。** 放物面（paraboloid）の形をしたパン（$y = \sqrt{x}$ を x 軸のまわりに回転させたもの）では、一切れあたりの耳の面積が定数に**ならない**ことを示せ。どのような曲線 $y(x)$ について $y\sqrt{1 + (y')^2}$ は定数になるか。（微分方程式（differential equation）を解け。）

4. **体積。** 体積の公式を使って、アルキメデスが見出したとおり、球の体積が外接円柱の体積の三分の二であることを示せ。

さらに学ぶために

- **Sherman Stein, *Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka?***（Mathematical Association of America）。アルキメデスの数学を現代の読者向けに解説した本。
- **Timothy Gowers, *Mathematics: A Very Short Introduction***（Oxford University Press）。幾何学の章で曲面の幾何学を紹介している。
- **John Snyder, *Flattening the Earth***（University of Chicago Press）。地図投影法の二千年の歴史。

詳しい解説付きの解答は第 4.8 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/spherical-loaf.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com