4.7 変分法

ワークシート

問題

STEP III 2014、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s3-q4

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　$I \geq 0$ が自明でないのはなぜか。$y(1) = 0$ を満たす $y = 1 - x$ で試してみよ。

段階 1　平方完成（completing the square）

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　I_1 の平方を展開し、$I - I_1$ を計算せよ。$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ を用いる。

手を止めて、やってみよう　被積分関数（integrand）$y^2 \sec^2 x + 2yy' \tan x$ は、ある関数の導関数そのもの（exact derivative）になっている。何の導関数か。そのうえで $y(1) = 0$ を用いよ。

段階 2　$I = 0$ となるのはどのようなときか

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　連続（continuous）かつ非負（non-negative）の関数の積分が 0 であるとき、その関数について何がいえるか。

手を止めて、やってみよう　したがって $y' + y\tan x = 0$ である。これを解き（$\sec x$ を掛けよ）、$y(1) = 0$ を用いよ。

段階 3 一般の場合

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう $\int_0^1 (y' + ay\tan bx)^2\,\mathrm{d}x$ について小問 (i) と同じ議論を繰り返せ。残りの項がある関数の導関数そのものになるためには、b はどうでなければならないか。

手を止めて、やってみよう この議論が破綻しうるのはどこか。$0 \le x \le 1$ における $\tan ax$ に注目せよ。

段階 4　臨界の場合

扱う内容：$a = \frac{\pi}{2}$ の場合

> **考えてみよう**　小問 (i) では、$I = 0$ とする関数は $y' + y\tan x = 0$ を満たすはずであった。今回これに対応する方程式は何か、またその解は何か。$a = \frac{\pi}{2}$ のとき、その解のうち $y(1) = 0$ を満たすものはあるか。

背後にある数学

最速降下線（brachistochrone）と一分野の誕生

1696 年、ヨハン・ベルヌーイ（Johann Bernoulli）はヨーロッパの数学者たちに挑戦状を出した。ある点から別の点へビーズが最短時間で滑り落ちる曲線を求めよ、というものである。解答はニュートン（Newton）（匿名で、一晩のうちに。ベルヌーイは「爪を見ればライオンとわかる」と述べた）、ライプニッツ（Leibniz）、ロピタル（l'Hôpital）、ヤコブ・ベルヌーイ（Jakob Bernoulli）から寄せられた。答えはサイクロイド（cycloid）である。1750 年代、オイラー（Euler）と若きジョゼフ＝ルイ・ラグランジュ（Joseph-Louis Lagrange）は、こうした個別の工夫を一般的な方法へとまとめ上げた。y が $\int F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$ を停留させるならば、y は**オイラー＝ラグランジュ方程式**（Euler–Lagrange equation）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

を満たす。ここでの J では $F = (y')^2 - a^2 y^2$ であり、オイラー＝ラグランジュ方程式は $y'' + a^2 y = 0$、すなわち単振動の方程式となる。

なぜ $\pi/2$ なのか

$a < \frac{\pi}{2}$ のとき、J の最小値は 0 であり、それを達成するのは $y \equiv 0$ だけである。$a = \frac{\pi}{2}$ では最小値はやはり 0 であるが、それを達成する関数がもう一つ現れる。$a > \frac{\pi}{2}$ のときは、同じ関数 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$ が

$$J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{a^2}{2} < 0,$$

を与え、y を定数倍で大きくすれば、J はいくらでも小さな負の値にできる。つまり最小値はまったく存在しない（図 4.7.1）。臨界値とは、$y'' + a^2 y = 0$ が境界条件（$y(1) = 0$ と、自由端における「自然な」条件 $y'(0) = 0$）を満たす 0 でない解をもつような最初の a である。これは**固有値問題**（eigenvalue problem）であり、$a^2 = \frac{\pi^2}{4}$ はその最小固有値である。Section 3.7 と比べてみよ。そこでは長さ π の区間の両端で関数を固定し、臨界値は 1 であった。ここでは区間の長さは 1 で、固定されているのは一方の端だけである。これは長さ 2 の区間の半分のようなものなので、臨界値となる a は $\frac{\pi}{2}$ になる。

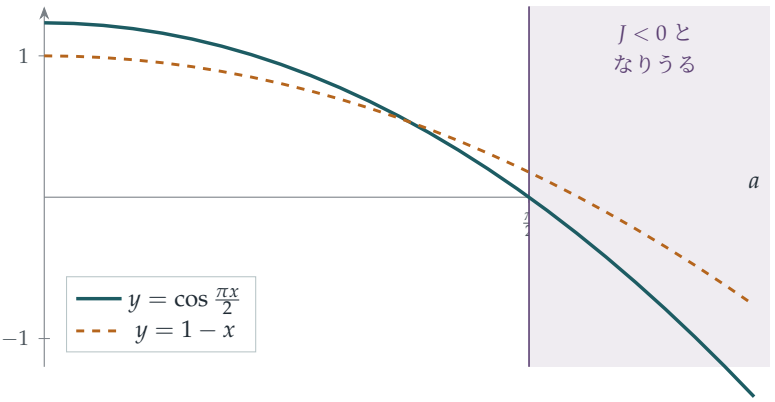

図 4.7.1　$y(1) = 0$ を満たす二つの試験関数について、a に対する J の値を示したもの。$y = 1 - x$ の場合、$J = 1 - \frac{a^2}{3}$ が負になるのは $a > \sqrt{3}$ のときだけである。$y = \cos\frac{\pi x}{2}$ の場合、$J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{a^2}{2}$ は $a > \frac{\pi}{2}$ となった途端に負になり、これより良い関数は存在しない。実際、$a < \frac{\pi}{2}$ のときはどの y に対しても $J \geq 0$ である。

物理学と最小作用の原理

変分法は、自然そのものを記述するものであることが明らかになった。18 世紀から 19 世紀にかけて、運動の法則は次のように述べられることがわかってきた。力学系は、**作用**（action）とよばれる積分を停留させるように運動する。同様に、光は所要時間が最小となる経路に沿って進み（フェルマー（Fermat）の原理）、これによって屈折が説明される。20 世紀には、リチャード・ファインマン（Richard Feynman）の「経路の総和」を通じて、同じ考え方が量子力学の基礎となった。この問題に現れる 2 次の積

分はその最も単純な例であり、そこから導かれる固有値問題は、Section 8.6 で量子振動子のエネルギー準位として再び現れる。

次の一歩

1 **臨界値を超えて。** $a > \frac{\pi}{2}$ ならば、$y = \cos\frac{\pi x}{2}$ が $J < 0$ を与えることを示せ。

2 **オイラー＝ラグランジュ方程式。** やや難 y が、$y(1) = 0$ を満たす関数の中で J を最小にするとする。$\eta(1) = 0$ を満たす任意の関数 η と任意の数 ε に対して $J(y+\varepsilon\eta) \geq J(y)$ が成り立つ。$J(y+\varepsilon\eta)$ を ε のべきで展開し、$\int_0^1 (y'\eta' - a^2 y\eta)\,\mathrm{d}x = 0$ を導け。部分積分を用いて、$y'' + a^2 y = 0$ かつ $y'(0) = 0$ であることを示せ（y は十分滑らかであると仮定せよ）。

3 **より長い区間。** 置換を用いて、$y(L) = 0$ ならば、すべての y に対して $\int_0^L \left((y')^2 - a^2 y^2\right)\mathrm{d}x \geq 0$ が成り立つのはちょうど $a \leq \frac{\pi}{2L}$ のときであり、0 でない y が等号を与えるのは $a = \frac{\pi}{2L}$ のときに限ることを示せ。

4 **サイクロイド。** 最速降下線問題を調べ、サイクロイドの媒介変数表示を求めよ。上下を逆さにしたサイクロイド上のどこからビーズを静かに放しても、最下点に達するまでの時間が同じであることを示せ（**等時曲線**（tautochrone）の性質。1659 年にホイヘンス（Huygens）が発見した）。

さらに学ぶために

- **Paul Nahin, *When Least Is Best***（Princeton University Press）。最速降下線を含む最適化の歴史と数学を、学生向けに書いたもの。
- **Richard Feynman, *The Feynman Lectures on Physics***（『ファインマン物理学』）, Volume II, Chapter 19（「The principle of least action」、最小作用の原理）。オンラインで無料で読める。
- **Bruce van Brunt, *The Calculus of Variations***（Springer）。学部生向けの教科書。最初のいくつかの章は A レベル（A level、英国の大学入学資格試験）の微分積分だけで読める。

詳しい解説付きの解答は第 4.7 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/variations.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com