4.6 公式で表せない積分

ワークシート

問題

STEP III 2016、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/16-s3-q3

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　$\int \mathrm{f}(x)e^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}e^x + \mathrm{C}$ であるとすると、P と Q はどのような等式を満たさなければならないか。（右辺を微分してみよ。）

段階 1 **因数（factor）** $x+1$

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}e^{x}$ を微分し、それを $\mathrm{f}(x)e^{x}$ と等しいとおく。分母を払って、多項式（polynomial）の間の恒等式（identity）を得よ。

手を止めて、やってみよう その恒等式に $x=-1$ を代入せよ。$\mathrm{Q}(-1)$ について何が成り立たなければならないか。

段階 2　次数

扱う内容：小問 (i)

手を止めて、やってみよう　P と Q の次数（degree）をそれぞれ p, q とする。$\mathrm{P}'\mathrm{Q} - \mathrm{P}\mathrm{Q}' + \mathrm{P}\mathrm{Q}$ において、次数が最も高いのはどの項か。両辺の次数を比較せよ。

段階 3　P を求める

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　$\mathrm{Q} = x + 1$ のとき、P は 2 次式である。$\mathrm{P} = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ とおいて代入し、係数比較（comparing coefficients）を行え。

段階 4 不可能であること

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x+1}$ の場合の恒等式を書け。小問 (i) と同様にして、$\mathrm{Q}(-1) = 0$ を示せ。

手を止めて、やってみよう $k \geq 1, \mathrm{R}(-1) \neq 0$ として $\mathrm{Q} = (x+1)^k \mathrm{R}$ とおけ。代入し、因数 $x+1$ をできるだけ約分してから $x = -1$ を代入せよ。$\mathrm{P}(-1)$ について何がわかるか。

背後にある数学

極と対数

小問 (ii) の背後には単純な描像がある。被積分関数 $\frac{e^x}{x+1}$ は $x = -1$ に **1 位の極**（simple pole）をもつ。すなわち、その近くでは $\frac{e^{-1}}{x+1}$ のように振る舞う。$\frac{1}{x+1}$ を積分すると $\ln|x+1|$ になるから、原始関数（antiderivative）は -1 の近くで $e^{-1}\ln|x+1|$ のように振る舞い、対数的に $-\infty$ へ向かうはずである（図 4.6.1）。ところが、有理関数に e^x を掛けたものは $(x+1)^{-k}$ のようなべきの形でしか発散できず、その導関数は位数

$k+1 \geq 2$ の極をもち、1 位の極になることはない。対数的な振る舞いは有理関数からは生み出せないのである。段階 4 の代数的議論は、この観察を厳密にしたものである。これに対して小問 (i) では、被積分関数は **2 位の極**（double pole）をもつ。これはまさに 1 位の極をもつ関数の導関数の姿であり、そのため有理的な答えが可能だったのである。

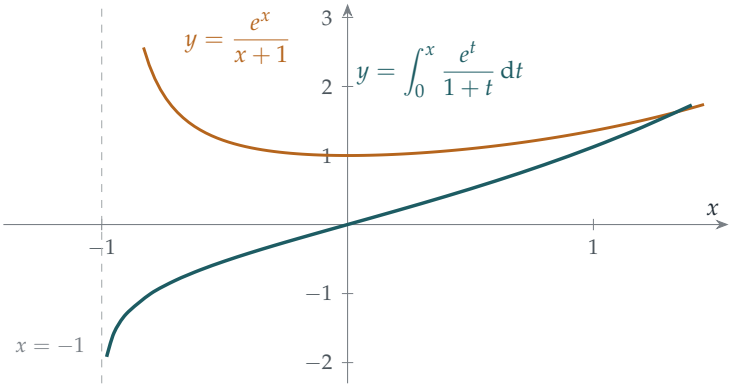

図 4.6.1　被積分関数 $\frac{e^x}{x+1}$（琥珀色）は $x=-1$ に 1 位の極をもつ。その原始関数（青緑色、数値計算による）は問題なく存在するが、$x \to -1^+$ のとき $e^{-1}\ln(x+1)$ のように**対数的に** $-\infty$ へ向かう。有理関数に e^x を掛けたものは、このような振る舞いをすることができない。

リウヴィルとリッシュのアルゴリズム

1830 年代、ジョゼフ・リウヴィル（Joseph Liouville）は、どのような積分が**初等関数**（elementary functions。多項式、指数関数、対数関数、累乗根、三角関数から通常の演算によって組み立てられる関数）で表せるかについての理論を築いた。その成果の一つによれば、f と g が有理関数で g が定数でないとき、$\int \mathrm{f}(x)e^{\mathrm{g}(x)}\,\mathrm{d}x$ が初等関数となるのは、ある有理関数 R によって $\mathrm{R}(x)e^{\mathrm{g}(x)}$（に定数を加えたもの）に等しい場合に限る。（g に関する条件は重要である。$\mathrm{g}=0$、$\mathrm{f}(x)=\frac{1}{x}$ のとき積分は $\ln|x|$ であり、これは初等関数ではあるが有理関数ではない。）したがって、有理的な形を否定したこの問題は、実は $\int \frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ がそもそも初等関数ではないことを証明しているのである。同じ定理の変形版により、$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ や $\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ も初等関数でないことが示される。1969 年、Robert Risch はリウヴィルの考えをアルゴリズムに仕立て上げた。これは広いクラスの関数について、初等的な積分が存在するかどうかを判定し、存在すればそれを求めるものである。その変形版は数式処理システム（computer algebra systems）の内部で動いている。

特殊関数

積分が初等的な形をもたないとき、数学者はそれに名前をつけ、新しい関数として研究する。Section 3.9 でランベルト（Lambert）の W 関数を扱ったのと同じである。ここでの積分は本質的に**指数積分**（exponential integral）$\mathrm{Ei}(x)$ である。これは熱伝導に現れるほか、**対数積分**（logarithmic integral）$\mathrm{li}(x) = \mathrm{Ei}(\ln x)$ にも現れる。対数積分は、x 以下の素数の個数に対する最良の簡単な近似式である（Section 1.2）。$x < 0$ のときは $\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ である。$x > 0$ のときは、この積分は $t = 0$ の無限に高い尖りを通過してしまうので、尖りのまわりの小さな区間 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ を取り除いて $\varepsilon \to 0$ とすることで $\mathrm{Ei}(x)$ を定義する。これが**コーシー（*Cauchy*）の主値**（Cauchy principal value）である。

次の一歩

1 **うまくいく二つの例。** $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{x+1} + C$ および $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x-1}{x+1}e^x + C$ を示せ。

2 **ガウス型関数。** $\displaystyle\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{P}(x)e^{-x^2} + C$ となる多項式 P は存在しないことを示せ。（ヒント：微分して次数を比較せよ。）

3 **もう一つの極。** 小問 (ii) の議論を応用して、$\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x$ は $\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}e^x + C$ の形ではないことを示せ。

4 **どのようなときに可能か。** f を多項式とし、ある多項式 P について $\displaystyle\int \frac{\mathrm{f}(x)}{(x+1)^2}e^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{P}(x)}{x+1}e^x + C$ が成り立つとする。$(x+1)\mathrm{P}' + x\mathrm{P} = \mathrm{f}$ を示し、この式とその導関数の $x = -1$ における値を考えることで、$\mathrm{f}(-1) + \mathrm{f}'(-1) = 0$ を示せ。この条件が $\mathrm{f}(x) = x^3 - 2$ および練習問題 1 の例について成り立つことを確かめよ。 やや難 この条件が十分条件でもあることを示せるか。

さらに学ぶために

- **Brian Conrad, “Impossibility theorems for elementary integration”**（初等積分の不可能性定理）。リウヴィルの定理を例とともに解説した講義ノートで、無料で入手できる。
- **Elena Anne Marchisotto & Gholam-Ali Zakeri, “An invitation to integration in finite terms”**（有限の形での積分への招待）、*The College Mathematics Journal* 25 (1994)。リウヴィルの理論へのやさしい入門。

- **Manuel Bronstein, *Symbolic Integration I***（Springer）（記号積分 I）。数式処理システムが実際にどのように積分を行うかを解説している。上級者向け。

詳しい解説付きの解答は第 4.6 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/no-formula.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com