4.5 2 年生の夢

ワークシート

問題

STEP III 2009、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/09-s3-q8

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　関数 x^x は、$x = 0$ では既知のどの式によっても定義されない（0^0 は定まらない）。x が上から 0 に近づくとき、この関数はどのように振る舞うだろうか。電卓で $x = 0.1$、0.01、0.001 を試してみよ。

段階 1 累乗（power）は対数（logarithm）に勝つ

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう $x \to 0^+$ のとき $\ln x \to -\infty$ である。$x \to 0^+$ を $t \to \infty$ に変え、$x^m (\ln x)^n$ を $e^{-mt} t^n$ のような形に変える置換（substitution）は何か。

手を止めて、やってみよう x^x については $x^x = e^{x \ln x}$ と書き、$m = n = 1$ として最初の結果を用いよ。

段階 2　漸化式（reduction formula）

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう　I_{n+1} を部分積分（integration by parts）せよ。どちらの因子を積分すべきか。

手を止めて、やってみよう　境界項（boundary term）は $x=1$ のとき、また $x \to 0$ のときどうなるか（小問 (i) を用いよ）。そのうえで、I_0 から始めて漸化式を繰り返し適用せよ。

段階 3　級数（series）

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう　e^y の級数を用いて $x^x = e^{x\ln x}$ を展開せよ。各項はどのような形になるか。

手を止めて、やってみよう　$m = n$ として小問 (ii) を用い、0 から 1 まで項別積分（term-by-term integration）せよ。

背後にある数学

和と積分の交換

ステージ 3 では、無限和と積分をさりげなく交換した。すなわち $\int \sum = \sum \int$ である。これはいつでも許されるわけではない。大学では、これが成り立たない例や、どのようなときに安全かを述べる定理に出会うことになる。最も簡単な定理は、級数が**一様収束**（uniform convergence）するとき、すなわち級数の残りの部分をすべての x で同時に小さくできるときには安全である、というものである。ここでは $(0,1]$ 上で $|x\ln x| \le \frac{1}{e}$ であるから、x が何であっても、第 n 項の大きさは高々 $\frac{e^{-n}}{n!}$ である。これ

らの上界の和は収束するので、残りの部分は一様に小さく、交換は正当化される。この議論は**ワイエルシュトラス（*Weierstrass*）の M 判定法**（Weierstrass M-test）と呼ばれ、解析学の主力となる道具の一つである。

なぜ「夢」が成り立つのか

この恒等式は特別である。$\frac{(x\ln x)^n}{n!}$ における累乗と、積分 $\int_0^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$ とがぴったり対応し、$n!$ が完全に打ち消し合うことに依存しているのである。その根底では、この積分は姿を変えたガンマ関数（Gamma function）である。置換 $x = e^{-t/(n+1)}$ によって、これは $\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}\int_0^\infty t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n\,\Gamma(n+1)}{(n+1)^{n+1}}$ となり、Section 4.4 とつながる。

名前の由来

「二年生の夢」という名前は、Jonathan Borwein とその共著者たちが 2004 年の著書 *Experimentation in Mathematics* の中で、「新入生の夢」$(a+b)^n = a^n + b^n$ と対をなすものとして名づけた。（興味深いことに、「新入生の夢」はある種の数の体系では正しい。素数 p を法とする算術（arithmetic modulo a prime）では、中間の二項係数（binomial coefficient）がすべて p で割り切れるので、$(a+b)^p = a^p + b^p$ が成り立つのである。）Borwein は**実験数学**（experimental mathematics）の先駆者であった。実験数学では、このような恒等式をコンピュータを使って発見し、そのあとで人の手で証明する。

次の一歩

---

1. **姉妹版。** $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n} \approx 1.2913$ を示せ。

2. **最小値。** x^x は $(0,\infty)$ において $x = \frac{1}{e}$ で最小値 $e^{-1/e}$ をとることを示せ。

3. **何項必要か。** 項が減少する交代級数（alternating series）では、途中で打ち切ったときの誤差は、最初に省いた項よりも小さい。$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x$ の級数で小数第 6 位まで求めるには、何項必要だろうか。

4. **いとこ。** 同じ方法を用いて、$\displaystyle\int_0^1 x^2\ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9}$ であること、および $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ であることを示せ。（Section 2.4 により、これは $-\frac{\pi^2}{6}$ である。）

さらに学ぶために

- **Jonathan Borwein, David Bailey & Roland Girgensohn, *Experimentation in Mathematics***（A. K. Peters）。名前の出典であり、コンピュータによって発見された恒等式がほかにも数多く載っている。
- **William Dunham, *The Calculus Gallery***（Princeton University Press）。ニュートン（Newton）からルベーグ（Lebesgue）に至る解析学の傑作を集めた本で、ベルヌーイの業績も含まれている。
- **Mary Hart, *Guide to Analysis***（Palgrave）。一様収束と、和と積分を交換できる条件について明快に解説している。

詳しい解説付きの解答は第 4.5 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/sophomores-dream.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com