4.4 ウォリス、ベータ、そして二分の一の階乗

ワークシート

問題

STEP II 1995、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s2-q4

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　u_0 と u_1 はいくらか。また、n が大きいとき、$[0, \frac{\pi}{2}]$ 上の $\sin^n t$ のグラフはおおよそどのような形をしているか。

段階 1 漸化式（reduction formula）

扱う内容：漸化式

考えてみよう $\sin^n t = \sin t \cdot \sin^{n-1} t$ と書き、$\sin t$ を積分して $\sin^{n-1} t$ を微分する形で部分積分（integration by parts）を行え。

手を止めて、やってみよう 新しい被積分関数（integrand）には $\cos^2 t$ が含まれる。これを $1 - \sin^2 t$ と書き直すと、u_n と u_{n-2} の式に戻る。そのうえで u_{n-1} を掛けよ。

段階 2　不変量（invariant）

扱う内容：$nu_n u_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$

> **手を止めて、やってみよう**　この関係式は、n が 1 減っても $nu_n u_{n-1}$ が変わらないことを示している。$n = 1$ のときの値はいくらか。u_0 と u_1 を計算せよ。

段階 3 はさみうち（squeeze）

扱う内容：グラフの概形、不等式（inequality）、極限（limit）

考えてみよう $0 < t < \frac{\pi}{2}$ のとき、$\sin^n t$ と $\sin^{n-1} t$ の大小はどうなるか。そこから u_n と u_{n-1} について何がいえるか。

手を止めて、やってみよう $nu_n u_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$ において $u_n < u_{n-1}$ を 2 通りに用いて、nu_n^2 をはさみ込め。次に、一方の不等式を n の代わりに $n+1$ として適用せよ。

背後にある数学

ウォリスの積

漸化式を u_0 または u_1 までたどると、具体的な値が得られる：

$$u_{2m} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m} \cdot \frac{\pi}{2}, \qquad u_{2m+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m+1)}.$$

はさみうちにより $u_{2m}/u_{2m+1} \to 1$ がわかる。この比を書き下して整理すると、ウォ

リスの積

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2m\cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)}.$$

を得る。ジョン・ウォリスは 1655 年、大胆な補間（interpolation）の手法によってこれを見いだした。指数が整数である積分の表に当てはめることで、$\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,dx$ が「どうあるべきか」を推測したのである。これは、ヴィエト（Viète）の無限積（Section 2.5）に次ぐ、数学における最初期の無限積の一つであり、有理数のみを用いたものとしては最初のものであった。

半分の階乗

ウォリスの補間の考え方は、1729 年にオイラー（Euler）によって厳密なものとなった。彼は、現在**ガンマ関数**（*Gamma function*）と呼ばれる関数

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt,$$

を見いだした。この関数は $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$（部分積分による）を満たし、整数 n に対しては $\Gamma(n+1) = n!$ となる。これは階乗（factorial）をすべての正の実数へなめらかに拡張するものである。これと密接に関係する**ベータ関数**（*Beta function*）

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

は、Section 4.3 や Section 2.9 の積分を含み、さらに置換 $x = \sin^2 t$ を行えば、ここでの u_n も含む。特に $\int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{1/2}\,dx = \frac{\pi}{8}$（演習 2）であり、これから $\Gamma(\frac{3}{2})^2/\Gamma(3) = \frac{\pi}{8}$、すなわち $\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ が得られる。同じことであるが、$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である。これは有名なガウス積分（Gaussian integral）$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ と同じ事実であり、正規分布（normal distribution）の式に π が現れる理由でもある。

スターリングの公式

スターリングの公式（Stirling's formula）は $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$ であることを述べている。$(n/e)^n$ の部分は比較的容易に得られるが、定数 $\sqrt{2\pi}$ を求めるのはより難しい。その標準的な求め方がまさにこの問題である。u_{2m} の具体的な値には $(2m)!/(m!)^2$ が含まれ、極限 $nu_n^2 \to \frac{\pi}{2}$ によってこの定数が確定するのである。確率論を経由して同じ定数に至るまったく別の道筋は、Section 12.23 にある。

次の一歩

1 **ウォリスの積。** u_{2m} と u_{2m+1} の具体的な値、および $u_{2m+1} < u_{2m} < u_{2m-1}$ を用いて、ウォリスの積を証明せよ。

2 **ベータ積分。** STEP II 2013、問 2（step.maths.org/questions/13-s2-q2）に挑戦せよ。この問題では漸化式を用いて $\int_0^1 x^n(1-x)^n\,\mathrm{d}x$ を求め、そのうえで $n=\frac{1}{2}$ のときにその答えから何が示唆されるかを問う。半分の階乗を初めて垣間見ることになる。

3 **ベータ関数。** STEP III 2025、問 1（OCR が配布している 2025 年の過去問一式に収録、www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip）に挑戦せよ。この問題では一般のベータ積分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$ について、その対称性と漸化式を導き、それらを用いて $[0,\infty)$ 上の積分を求める。

4 **中心二項係数（central binomial coefficients）。** やや難 $u_{2m}=\binom{2m}{m}\dfrac{\pi}{2^{2m+1}}$ を示し、$nu_n^2\to\frac{\pi}{2}$ を用いて、m が大きいとき $\binom{2m}{m}\approx\dfrac{4^m}{\sqrt{\pi m}}$ となることを導け。$m=10$ の場合にこれを確かめよ。

さらに学ぶために

- **Julian Havil, *Gamma***（Princeton University Press）。ガンマ関数とその歴史を扱っている。
- **Philip J. Davis,「Leonhard Euler's integral: a historical profile of the Gamma function」**（オイラーの積分：ガンマ関数の歴史的概観）, *American Mathematical Monthly* 66 (1959)。受賞歴のある古典的な論文で、この節を学んだ後なら読みこなせる。
- **Emil Artin, *The Gamma Function***（Dover）。解析学をある程度学んだ後に読むとよい、短く美しいモノグラフである。

詳しい解説付きの解答は第 4.4 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/wallis-beta.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com