4.3 22/7 は π より大きい

ワークシート

問題

STEP I 1997、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/97-s1-q6

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　なぜ $\int_0^1 \frac{\text{多項式}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ から π が出てくるのだろうか。この形の簡単な積分のうち、それ単独で π を与えるものはどれか。

段階 1 多項式の割り算

扱う内容：x^2+1 による割り算

? **考えてみよう** まず $x^4(1-x)^4$ を展開せよ。

手を止めて、やってみよう 筆算による割り算（long division）を用いるか、最高次の項から係数を比較して、x^2+1 で割れ。余り（remainder）は何か。

段階 2　積分

扱う内容：$\frac{22}{7} - \pi$ に等しい積分

考えてみよう　得られた恒等式（identity）の両辺を $1 + x^2$ で割り、0 から 1 まで項ごとに積分せよ。どの積分が π を与えるか。

段階 3 積分の評価

扱う内容：π の上下からの評価

考えてみよう 被積分関数（integrand）は $(0,1)$ で正である。このことから直ちに何がわかるか。

手を止めて、やってみよう $[0,1]$ において $\frac{1}{1+x^2}$ はどこまで大きく、またどこまで小さくなりうるか。それを用いて積分を上下から評価（bound）し、$\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx$ を計算せよ。

背後にある数学

歴史をもつ証明

アルキメデス（Archimedes）は紀元前 250 年頃、円に内接および外接する 96 角形の周の長さを計算することによって $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ を証明した（Section 2.5 の多角形と比較せよ）。積分による証明はずっと新しい。これは D. P. Dalzell によって 1944 年に発表され、1968 年にアメリカの学部生向けのパットナム数学競技会（Putnam competition）で問題として出題されたことで有名になった。その魅力は、数値計算

をまったく必要としない点にある。不等式 $\frac{22}{7} > \pi$ は、正の関数の積分は正であるという事実からおのずと導かれるのである。

同じ考え方によるさらによい近似

この方法は一般化できる。$x^4(1-x)^4$ の代わりに $x^8(1-x)^8$ を用いると、同様の割り算により

$$\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\pi - \frac{188684}{15015},$$

が得られ、これから $\pi > \frac{47171}{15015} = 3.1415917\ldots$ が証明される。これは有効数字（significant figures）6 桁まで正しい。2009 年に Stephen Lucas は、被積分関数が非負であるこの種の積分の族を見いだし、有効数字 7 桁まで正しい $\frac{355}{113}$ を含む、他の有名な近似についての不等式を証明した。

近似と無理性

なぜ π は $\frac{22}{7}$ や $\frac{355}{113}$ のような非常によい分数近似をもつのだろうか。すべての無理数（irrational number）には、それとの差が $\frac{1}{q^2}$ 以内である分数 $\frac{p}{q}$ が無限に多く存在する。そして π の場合は、その連分数（continued fraction）$[3;7,15,1,292,\ldots]$ が大きな項 292 を含むため、たまたま早い段階で格別によい近似がいくつか現れるのである（Section 2.2 を参照）。この問題に現れるような積分をどんどん小さくしていくことは、ある数が分数によって**あまりよく近似できない**こと、したがって無理数であることを示す証明の出発点となる。アイヴァン・ニーヴン（Ivan Niven）による π が無理数であることの有名な 1 ページの証明（1947 年）では、$\frac{x^n(1-x)^n}{n!}\sin(\pi x)$ の積分が用いられている。これは Section 2.9 に現れた積分の三角関数版である。

次の一歩

1. **数値を確かめる。** $\frac{22}{7} - \pi$ を有効数字 4 桁で計算し、それが $\frac{1}{1260}$ と $\frac{1}{630}$ の間にあることを確かめよ。

2. **ベータ積分。** 公式 $\int_0^1 x^n(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$（Section 4.4 で証明した）を用いて、$\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{630}$ を確かめよ。

3. **下からの近似。**

$$\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \quad \text{および} \quad \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi - \frac{47}{15},$$

   を示し、$\pi > 3$ および $\pi > \frac{47}{15}$ を導け。これらが $\frac{22}{7}$ より精度が低いのはなぜか。

4 **さらに進んで。** やや難 上に挙げた $\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ に関する等式を確かめよ。（割り算は数式処理システムに任せてよい。要点は、余りが 16 となり、4π が得られることを見ることである。）

さらに学ぶために

- **Petr Beckmann, *A History of* π**（St Martin's Press）。『π の歴史』。アルキメデスの多角形による方法の詳細をはじめ、多くの話題を扱う。
- **Stephen Lucas, "Approximations to π derived from integrals with nonnegative integrands"**, *American Mathematical Monthly* 116 (2009)。非負の被積分関数をもつ積分から導かれる π の近似についての論文。短く読みやすい。
- **Ivan Niven, *Irrational Numbers***（Mathematical Association of America）。『無理数』。π が無理数であることのニーヴンによる証明を収録している。

詳しい解説付きの解答は第 4.3 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/twenty-two-sevenths.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com