4.2 積分から三角関数を構成する

ワークシート

問題

STEP III 2017、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/17-s3-q6

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　小問 (i) と (ii) は、それぞれどの三角関数の恒等式（identity）に対応しているだろうか。($\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ と、$\tan(A+B)$ の公式を考えてみよ。)

段階 1　**反転** $u \mapsto 1/u$

扱う内容：小問 (i)

手を止めて、やってみよう　$\mathrm{T}(x)$ において $u = 1/w$ と置換（substitution）せよ。被積分関数（integrand）はどうなるか。また、積分の上端と下端（limits）はどうなるか。

段階 2 加法の置換

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう $v = \frac{u+a}{1-au}$ を商の微分法（quotient rule）で微分せよ。次に $1+v^2$ を一つの分数にまとめ、両者を比べよ。

手を止めて、やってみよう したがって $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2}$ であり、この置換で被積分関数は変わらない。では、$\mathrm{T}(x)$ の積分の上端と下端はどうなるか。

段階 3　さらに二つの恒等式

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう　小問 (i) を 2 回用いて $\mathrm{T}(x)$ と $\mathrm{T}(a)$ を置き換えよ。次に文字を付け替えて $y = 1/x$、$b = 1/a$ とおけ。条件 $x < 1/a$ はどうなるか。

段階 4 特別な値

扱う内容：小問 (iii)

手を止めて、やってみよう $\mathrm{T}(\sqrt{3})$ については、最後の恒等式（identity）において $\frac{y+b}{by-1}$ が y 自身に等しくなるように y と b を選べ。

考えてみよう $\mathrm{T}(\sqrt{2}-1)$ については、加法の恒等式で $x = a = \sqrt{2}-1$ とせよ。$\frac{2x}{1-x^2}$ は何になるか。また、小問 (i) から $\mathrm{T}(1)$ について何がわかるか。

背後にある数学

初等関数を構成する

厳密な解析学の講義では、関数 exp、sin、cos、ln の存在を単に仮定することはできない。それらは**構成**されなければならず、その性質も証明されなければならない。標準的な方法は三つある。冪級数（power series）によって定義する方法（$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$）。演習問題にある 1986 年の見本問題のように、微分方程式（differential equation）の解として定義する方法（$\mathrm{f}' = \mathrm{f}$、$\mathrm{f}(0) = 1$ によって exp が

定まる）。あるいは、ここで行ったように、逆関数（inverse function）を積分で定義する方法である。すなわち $\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{u}$、$\arctan x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ とし、そのうえで $\pi = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ と定義する。どの方法にもそれぞれの長所があり、これらがすべて同じ関数を与えることを証明するのは、やりがいのある演習である。Section 3.8 の関数方程式（functional equation）による方法と比べてみよ。

円を越えて：楕円積分

積分による方法は、三角形による方法では不可能な形で一般化できる。1718 年、ジュリオ・ファニャーノ（Giulio Fagnano）は 8 の字形の曲線である**レムニスケート**（lemniscate）の弧長（arc length）を研究した。これは $\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}$ に帰着する。ファニャーノは、ちょうど我々の置換が T を 2 倍にしたように、弧を 2 倍にする置換を発見した。1751 年にファニャーノの研究を読んだオイラー（Euler）は完全な加法定理を見いだし、これがやがてアーベル（Abel）とヤコビ（Jacobi）を経て、**楕円関数**（elliptic function）の理論へとつながった。楕円関数とはこのような積分の逆関数であり、sin と cos が円に対してもつ役割を、レムニスケートに対して果たすものである。同じ積分には、ガウス（Gauss）の算術幾何平均（AGM）に関する研究（Section 2.6）でも出会った。楕円関数は今日、数論（number theory）の中心にある。Section 1.9 の楕円曲線（elliptic curve）は、その幾何学的な影である。

π を計算する

加法の恒等式は、π を計算するための最も有名な公式群の基礎でもある。これを繰り返し適用すると、たとえば $\mathrm{T}(1) = 4\mathrm{T}(\frac{1}{5}) - \mathrm{T}(\frac{1}{239})$ が示される。これが 1706 年のマチン（Machin）の公式である。級数 $\mathrm{T}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ と組み合わせることで、この公式は π の 100 桁を与え、その後 2 世紀半にわたって最良の方法であり続けた。これが Section 5.1 の主題である。

次の一歩

1. **指数関数と余弦関数。**STEP II Specimen paper、問 6（step.maths.org/questions/spec-s2-q6）に挑戦せよ。この問題は、指数関数と余弦関数の加法定理を、それらの微分方程式だけから導く。（**ヒント**：余弦関数については、0 になるはずの二つの組合せを見つけ、それらの平方の和が一定であることを示せ。）

2. **逆正弦関数。**STEP III 2007、問 7（step.maths.org/questions/07-s3-q7）に挑戦せよ。この問題は、逆正弦関数（inverse sine）をこの節の積分と同じように扱い、置換によって両者を結びつける。

3 **初期のマチン型公式。** 加法の恒等式を用いて、$\mathrm{T}(\frac{1}{2}) + \mathrm{T}(\frac{1}{3}) = \mathrm{T}(1) = \frac{1}{2}\mathrm{T}_\infty$ を示せ。

4 T_∞ **は有限である。** すべての $x \geq 1$ に対して $\mathrm{T}(x) \leq 1 + \int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2} < 2$ であることを示し、$0 < x < 1$ に対しても $\mathrm{T}(x) < 2$ となる理由を説明せよ。さらに、単調収束定理（monotone convergence theorem）（Section 2.2）から T_∞ が存在することを導け。

さらに学ぶために

- **Tom Körner,** ***Calculus for the Ambitious*** （Cambridge University Press）。初等関数を厳密に構成し、さまざまな方法について論じている。
- **Walter Rudin,** ***Principles of Mathematical Analysis*** （McGraw-Hill）。邦訳『現代解析学』。有名な「baby Rudin」である。第 8 章の序論では、冪級数から exp、sin、cos をわずか数ページで見事に構成している。上級向け。
- **Victor Prasolov & Yuri Solovyev,** ***Elliptic Functions and Elliptic Integrals*** （American Mathematical Society）。レムニスケートがどこへつながっていくのかを知りたい人に。上級向け。

詳しい解説付きの解答は第 4.2 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/trig-from-integral.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com