4.1 積分とは何か？

ワークシート

問題

STEP III 1989、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/89-s3-q10

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　小問 (iii) の二つの和は、幅 $\frac{a}{n}$ の長方形の面積の和である。増加関数（increasing function）f について、どちらの和が曲線の下の面積を過小に見積もり、どちらが過大に見積もるか。

段階 1　望遠鏡和となる和

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　$P(r) = r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)$ とおく。これは連続する 6 つの整数の積である。$P(r) - P(r-1)$ を計算せよ。両者に共通する因数はどれか。

手を止めて、やってみよう　得られた結果を $r = 1$ から n まで加えよ。ほとんどの項が打ち消し合う（望遠鏡和、telescoping sum）。そのうえで、r^5 と $r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$ を比較せよ。

段階 2　下界

扱う内容：小問 (ii)

手を止めて、やってみよう　今度は、r で終わる減少していく連続整数の積 $(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r$ について同じことを行え。$r=0$ から $n-1$ まで加え、各項を r^5 と比較せよ。なぜ不等式は等号を含まない厳密なもの（strict inequality）になるのか。

段階 3 積分

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう 増加関数（increasing function）の場合、2 つの和のうち、面積を過小評価するのはどちらで、過大評価するのはどちらか。

手を止めて、やってみよう $f(x) = x^5$ について両方の和を $\sum r^5$ を用いて表し、小問 (i) と (ii) を利用せよ。$n \to \infty$ のとき、上下からの評価はそれぞれ何に収束（converge）するか。

背後にある数学

リーマンの定義

細い帯を足し合わせて面積を求めるという発想は、アルキメデス（Archimedes）にまでさかのぼる。彼は紀元前 250 年ごろ、まさにこの議論の一種によって放物線の下の面積を求めた。ニュートン（Newton）とライプニッツ（Leibniz）は積分を微分の逆として捉え直し、その後一世紀半にわたって、ほとんどの人はそのように積分を考えていた。1854 年、ベルンハルト・リーマン（Bernhard Riemann）は、今日でも大学

の講義が出発点とする定義を与えた。$[a,b]$ を小さな区間に分割し、（幅）×（その区間内のどこかでの f の高さ）の和をつくり、区間を細かくしていったときにそのような和がすべて一つの極限に近づくならば、f は可積分（integrable）であるという。この問題での形、すなわち等幅の帯と左右の端点を用いるものは、増加関数に対して有効な特別な場合である。一般の場合は、ジャン＝ガストン・ダルブー（Jean-Gaston Darboux）の「上和と下和」によってすっきりと扱える。

すべての関数が積分をもつわけではない

厳密な定義があれば、どのような関数が可積分であるかを問うことができる。閉区間上の連続関数（continuous function）はすべて可積分であり、増加関数もすべて可積分である。しかし、ディリクレ（Dirichlet）の関数、すなわち x が有理数（rational number）ならば $\mathrm{f}(x)=1$、無理数（irrational number）ならば 0 とする関数を考えてみよう。どれほど細い帯にも有理数と無理数の両方が含まれるので、上和はつねに 1、下和はつねに 0 となる。両者は決して一致せず、$\int_0^1 \mathrm{f}$ はリーマンの意味では存在しない。1902 年、アンリ・ルベーグ（Henri Lebesgue）は、この関数も扱える（そのルベーグ積分は 0 である）うえに、極限操作に対してはるかに扱いやすい、より強力な積分を考案した。ルベーグ積分（Lebesgue integral）は現代の確率論（probability theory）の基礎であり、大学の 2、3 年次で出会うことになる。

離散的な微分積分

段階 1 の望遠鏡和は、姿を変えた微分積分である。「上昇階乗」（rising factorial）$r(r+1)\cdots(r+k-1)$ は、和をとる操作に対して、x^k が積分に対して振る舞うのとまったく同じように振る舞う。和をとると因数の個数が一つ増え、新しい因数の個数で割られる。これは $\int x^k\,\mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1}$ とちょうど対応している。和と積分、差分と導関数の間のこの類似は**差分法**（calculus of finite differences）と呼ばれ、和を計算するための強力な道具である。

次の一歩

1. **積分としての極限。** STEP III 1999、問 3（step.maths.org/questions/99-s3-q3）に挑戦せよ。この問題では和の極限を積分に書き換える。それぞれの和について、曲線の下にある長方形を見つけよ。

2. **アルキメデスの放物線。** $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ と小問 (iii) の定義を用いて、$\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^3$ を証明せよ。

3 **上昇階乗。** すべての正の整数 k に対して $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r(r+1)\cdots(r+k-1) = \frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{k+1}$ が成り立つことを示せ。

4 **正確な和。** 恒等式 $r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) = r^5 + 10r^4 + 35r^3 + 50r^2 + 24r$ と、$k \le 4$ に対する $\sum r^k$ の既知の公式を用いて、$\sum_{r=1}^{n} r^5$ を正確に求めよ。

さらに学ぶために

- **David Bressoud, *A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration***（Cambridge University Press）。リーマン積分からルベーグ積分に至る物語を、各段階を必然とした問題を通して語る。
- **Michael Spivak, *Calculus***（Cambridge University Press）。第 13 章では、ここでの方法とまったく同じように、上和と下和によって積分を定義している。
- **Graham, Knuth & Patashnik, *Concrete Mathematics***（Addison-Wesley）。第 2 章では、上昇階乗と下降階乗（falling factorial）を用いて差分法を展開している。

詳しい解説付きの解答は第 4.1 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/riemann.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com