3.9 新しい関数を発明する

ワークシート

問題

STEP II 2021、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　方程式を「解く」とは、実際にはどういう意味だろうか。$x = \sqrt{2}$ は $x^2 = 2$ の解なのだろうか、それとも単に解に付けた名前にすぎないのだろうか。

段階 1 曲線 $y = xe^x$

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう xe^x を微分せよ。停留点（stationary point）はどこにあり、それはどのような種類の点か。

考えてみよう $x \to +\infty$ のとき、また $x \to -\infty$ のとき、xe^x はどうなるか。曲線は座標軸とどこで交わるか。

段階 2　逆関数

扱う内容：小問 (ii)

手を止めて、やってみよう　逆関数（inverse）が存在するためには、f が $[a, \infty)$ 上で一対一（one-to-one）でなければならない。条件を満たす最小の a は何か。$y = \mathrm{g}(x)$ のグラフは、直線 $y = x$ に関して対称移動して描け。

段階 3　4 つの方程式

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう 定義となる性質は $\mathrm{g}(z)\,e^{\mathrm{g}(z)} = z$ である。どの小問でも、(何か) $e^{(\text{同じ何か})} =$ (ある数) の形を目指せ。(a) では e^{x} を掛けよ。

考えてみよう (b) と (c) では、未知数は $x \ln x$ の形で現れる。どのような置換（substitution）をすれば、$x \ln x$ が ue^{u} の形の式になるか。

手を止めて、やってみよう ue^{u} の最小値を思い出せ。(c) では、$ue^{u} = -\frac{1}{3}$ の解はいくつあり、g が与えるのはそのうちどれか。(d) では、両辺を指数の肩に乗せ、指数部分に x の定数倍が現れるようにせよ。

段階 4　$x^{x} = 10$

扱う内容：小問 (iv)

> **考えてみよう**　対数をとり、(b) や (c) と同じ置換を用いよ。

背後にある数学

長い歴史と新しい名前をもつ関数

ヨハン・ハインリッヒ・ランベルト（Johann Heinrich Lambert）は 1758 年にこの種の方程式を研究し、オイラー（Euler）は 1783 年にそれをさらに発展させた。しかしこの関数には、1990 年代になるまで標準的な名前がなかった。名前が必要になったのは、数式処理システム（computer algebra system）Maple の開発者たちである。1996 年、Robert Corless、Gaston Gonnet、David Hare、David Jeffrey、そしてドナルド・クヌース（Donald Knuth）は、論文「On the Lambert W function」を発表し、この関数の性質と応用をまとめた。この論文は数千回引用され、W は現在ではほとんどの数学ソフトウェアに組み込まれている。問題中の関数 g は**主枝**（principal branch）W_0 である。図 3.9.1（オンライン版の節全体を参照）の破線の曲線は (c) と (d) の二つ目の解を与えたものであり、もう一つの実数の分枝 W_{-1} である。

W が現れるところ

- **ウィーンの変位則（Wien's displacement law）。**高温の物体が最も強く放射する波長は、その温度に反比例する。その比例定数は $5(1 - e^{-x}) = x$ を解くことで得られ、その正の解は $x = 5 + W\!\left(-5e^{-5}\right) \approx 4.965$ である。約 5800 K の太陽が黄白色に見え、より低温の赤色矮星が赤く見えるのはこのためである。
- **冪の塔（power tower）。**無限の冪の塔 $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ は $e^{-e} \le x \le e^{1/e}$ のとき収束（converge）

し、その値は $\dfrac{W(-\ln x)}{-\ln x}$ である。

- ▶ **人口モデルと感染症モデル。**最も単純なモデルにおける感染症の最終規模や、いくつかの成長モデルにおいて人口が所定の値に達するまでの時間は、いずれも W によって与えられる。

初等関数

W は本当に新しい関数なのだろうか。それとも exp、ln、累乗根、三角関数を用いて書き表せるのだろうか。答えは、本当に新しい関数である。1830 年代のリウヴィル（Joseph Liouville）にさかのぼる定理により、W は**初等関数**（elementary function）ではないことが示される。同じ理論により、$\int e^{-x^2}\,dx$ のような一見何でもない積分も初等関数の範囲では計算できないことがわかる。正規分布（normal distribution）が独自の特殊関数を必要とするのはこのためである。

次の一歩

1. **2 と 4、そしてもう一つ。**方程式 $x^2 = 2^x$ には明らかな解 $x = 2$ と $x = 4$ がある（Section 3.5 と比較せよ）。この方程式には負の解もあり、それが
$$x = -\frac{2}{\ln 2}\,\mathrm{g}\left(\frac{\ln 2}{2}\right) \approx -0.767.$$
であることを示せ。

2. **導関数。**$\mathrm{g}(x)e^{\mathrm{g}(x)} = x$ を陰関数微分（implicit differentiation）することにより、$x \neq 0$ のとき
$$\mathrm{g}'(x) = \frac{\mathrm{g}(x)}{x\big(1+\mathrm{g}(x)\big)}.$$
であることを示せ。$x = -\frac{1}{e}$ では何が起こるだろうか。

3. **積分。**置換 $x = we^w$ を用いて、$\displaystyle\int_0^e \mathrm{g}(x)\,dx = e - 1$ を示せ。

4. **冪の塔。**冪の塔 $T = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}$ が収束すると仮定して、$T = \sqrt{2}^T$ を示し、$T = 2$ または $T = 4$ であることを導け。どちらが正しいだろうか（数列 $t_1 = \sqrt{2}, t_{n+1} = \sqrt{2}^{t_n}$ の最初のいくつかの項を計算し、Section 2.2 のくもの巣図（cobweb diagram）について考えてみよ）。

さらに学ぶために

- ▶ **Robert Corless et al., “On the Lambert W function”**, *Advances in Computational Mathe-*

matics 5 (1996)。この関数に名前を与えた論文である。この節を学んだ後であれば、最初のいくつかの節は読むことができる。

- **Brian Hayes, “Why W?”**, *American Scientist* 93 (2005)。この関数の歴史と用途についての生き生きとしたエッセイ。オンラインで無料で読める。
- **Brian Conrad, “Impossibility theorems for elementary integration”**。リウヴィルの理論を解説した講義ノートで、オンラインで入手できる。上級者向け。

詳しい解説付きの解答は第 3.9 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/lambert-w.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com