3.8 加法定理から関数を決める

ワークシート

問題

STEP III 2019、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　この等式は**すべての** x と y について成り立つ。まず試してみるべき最も有用なことは何だろうか。

段階 1　0 における値

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　この等式はすべての x と y について成り立つ。$x = y = 0$ とおいてみよ。$\mathrm{f}(0)$ としてどのような値があり得るか。

手を止めて、やってみよう　$\mathrm{f}(0) = 0$ だとすると何がまずいか。$y = 0$ とおいてみよ。

段階 2　0 における導関数からすべての点における導関数へ

扱う内容：小問 (i)

手を止めて、やってみよう　$f'(x)$ の定義において、$f(x+h) = f(x)f(h)$ と書き換えよ。極限（limit）の外に出せるものは何か。また、残る極限は何か。

段階 3　$f' = kf$ を解く

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　$f(x)\,e^{-kx}$ を考えよ。その導関数（derivative）は何か。

段階 4　2 つ目の規則

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう　g に関する規則で $y=0$ とおいてみよ。そこから $\mathrm{g}(0)$ について何がわかるか。$|\mathrm{g}(x)|<1$ という条件はどこで使われるか。

手を止めて、やってみよう　規則を用いて $\mathrm{g}(x+h)-\mathrm{g}(x)$ を 1 つの分数として表し、整理してから h で割り、$h\to 0$ とせよ。

段階 5　方程式を解く

扱う内容：小問 (ii)

> **手を止めて、やってみよう**　変数分離（separation of variables）を行え。$|g|<1$ において導関数が $\frac{1}{1-g^2}$ となる関数は何か。

背後にある数学

相対性理論における速度

日常生活では、列車が速さ u で走っていて、その中を前向きに速さ v で歩けば、地面に対する速さは $u+v$ である。アインシュタインは 1905 年に、これが近似にすぎないことを示した。c を光速とすると、正しい規則は

$$u \oplus v = \frac{u+v}{1+uv/c^2}.$$

である。速さを c に対する割合で測れば、これはまさに g の規則である。ここで得た結果は、各速度を $v=\tanh\phi$ と書けば、速度の合成は ϕ を**足し合わせる**ことになる、ということを意味している。量 $\phi=\operatorname{artanh} v$ を**ラピディティ**（rapidity）という。ロケットエンジンによる一回ごとの加速はラピディティを一定量だけ増やすが、すべての ϕ について $\tanh\phi<1$ であるから、速度は光速にどんどん近づくものの、決して到達しない（図 3.8.1）。$0.9c$ と $0.9c$ を合成すると、$1.8c$ ではなく $\frac{1.8}{1.81}c\approx 0.9945c$ になる。

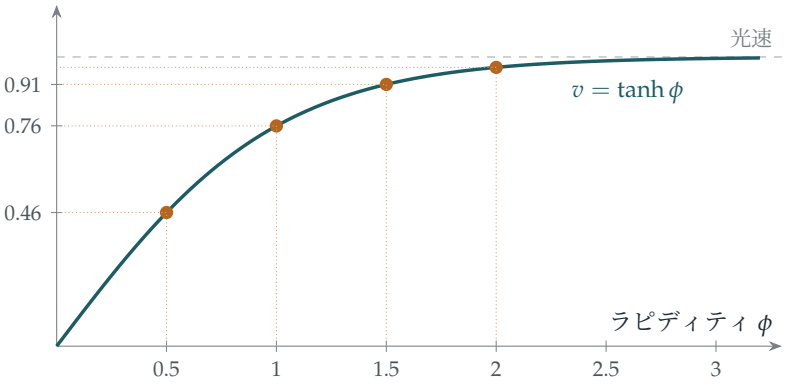

図 3.8.1　ラピディティに対する速度（光速に対する割合）。ラピディティを等しい幅で増やす（エンジンによる等しい加速がもたらすのはまさにこれである）と、速度の増加はどんどん小さくなる：0.46, 0.76, 0.91, 0.96, ...となり、決して 1 には達しない。

コーシーの関数方程式

最も単純な関数方程式は $f(x+y) = f(x) + f(y)$ であり、1821 年にコーシー（Cauchy）が研究した。f が微分可能ならば、この問題の方法によって $f(x) = kx$ が示される。実は連続性だけで十分である。しかし、正則性の仮定を一切置かなければ、まったく異様な別の解が存在し、そのグラフは平面全体に稠密に散らばっている。ハメル（Georg Hamel）は 1905 年にそれらを構成した。その構成には**選択公理**（axiom of choice）が必要であり、そうした解のどれ一つとして具体的に書き下すことはできない。問題が f の微分可能性を強く求めている理由の一つはここにある。この仮定は形式的なものではないのである。

準同型

$f(x+y) = f(x)f(y)$ は、f が実数の加法を正の実数の乗法に変え、両者の構造を保つことを述べている。大学一年の代数の言葉でいえば、f は $(\mathbb{R}, +)$ から $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$ への**群準同型**（group homomorphism）であり、対数関数はその逆写像である。数学における最も重要な関数の多くは、このように、それらが保つ構造によって特徴づけられる。Section 7.6 では tanh の幾何学的な意味に出会う。tanh は「双曲角」（hyperbolic angle）を測るものであり、その加法定理は双曲的回転の合成から生じるのである。

次の一歩

1 **正接の規則。** g は微分可能で $g'(0) = k \neq 0$ であり、両辺が定義されるときには常に $g(x+y) = \dfrac{g(x)+g(y)}{1-g(x)g(y)}$ が成り立つとする。$g'(x) = k\bigl(1+g(x)^2\bigr)$ を示し、$x = 0$ の近くで $g(x) = \tan kx$ であることを導け。

2 **コーシーの方程式。** f が微分可能で、すべての x, y について $f(x+y) = f(x)+f(y)$ が成り立つならば、$f(x) = kx$ であることを示せ。

3 **導関数を使わずに。** やや難 $f(x+y) = f(x)f(y)$ と $f(1) = a > 0$ だけを仮定する。正の整数 n について $f(n) = a^n$ であることを示し、次に $f(1/n) = a^{1/n}$ を示し、さらにすべての正の有理数 q について $f(q) = a^q$ であることを示せ。（これより先に進むには、なぜ連続性が必要なのだろうか。）

4 **ロケット科学。** あるロケットは、噴射するたびに、その時点での自分の座標系に対して速さを $0.5c$ だけ増やすことができる。静止状態から始めて、2 回、3 回、4 回噴射した後の（出発点に対する）速さはいくらか。ラピディティを用いよ。

さらに学ぶために

- **Christopher Small, *Functional Equations and How to Solve Them*** (Springer)。『関数方程式とその解き方』。問題を解く人に向けた、読みやすい入門書である。
- **Edwin Taylor & John Wheeler, *Spacetime Physics*** (W. H. Freeman)。『時空の物理学』。特殊相対性理論への古典的な入門書で、全体を通してラピディティを用いている。
- **Tom Körner, *Calculus for the Ambitious*** (Cambridge University Press)。『意欲ある人のための微積分』。指数関数や三角関数をその性質から定義しており、まさにこの節の精神に沿った本である。

詳しい解説付きの解答は第 3.8 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/addition-laws.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com