3.7 $\pi^2 \leq 10$

ワークシート

問題

STEP II 2014、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s2-q2

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

> **考えてみよう**　$[0,\pi]$ の両端で 0 となる関数が、中央で大きな値をとるならば、なぜ急でなければならないのだろうか。条件 $\mathrm{f}(0)=\mathrm{f}(\pi)=0$ はなぜ重要なのだろうか。

段階 1　正弦波

扱う内容：小問 (i)

> **考えてみよう**　$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ と $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$ を用いて、$\int_0^{\pi}\sin^2 nx\,\mathrm{d}x$ と $\int_0^{\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x$ を計算せよ。

段階 2 端点での条件（end conditions）が重要である

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう $\mathrm{f}(0) \neq 0$ であって $(*)$ が成り立たないような簡単な関数を見つけよ。次に、$\mathrm{f}(0) = 0$ であるが $\mathrm{f}(\pi) \neq 0$ であるような関数を見つけよ。

段階 3　放物線（parabola）

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう　$x=0$ と $x=\pi$ で 0 になる二次関数（quadratic）はどれか。定数倍（constant multiple）が問題にならないのはなぜか。

手を止めて、やってみよう　$\mathrm{f}(x)=x(\pi-x)$ について両方の積分を計算せよ。置換（substitution）$u=x-\frac{\pi}{2}$ を行うと、どちらの被積分関数（integrand）も偶関数（even function）になる。

段階 4 三角関数による選び方

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう $\mathrm{f}(0) = 0$ と $\mathrm{f}(\pi) = 0$ からは、p、q、r にどのような条件が課されるか。

手を止めて、やってみよう $\int_0^{\pi} \mathrm{f}^2$ と $\int_0^{\pi} (\mathrm{f}')^2$ を計算せよ。$\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 = 1 + \sin x$ であることが役に立つ。その結果、π についてどのような不等式が得られるか。

段階 5　どちらがよいか

扱う内容：小問 (ii)

> **考えてみよう**　得られた π の評価を 2 乗し、放物線から得られる評価と比較せよ。

背後にある数学

フーリエ級数による証明

なぜ $(*)$ は成り立つのだろうか。大学では、$[0,\pi]$ 上の「性質のよい」関数で両端で 0 となるものは、**フーリエ正弦級数**（Fourier sine series）

$$\mathrm{f}(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots .$$

として表せることを学ぶ。$m \neq n$ のとき $\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \,\mathrm{d}x = 0$ であるから、2 乗して積分すると交差項はすべて消え、

$$\int_0^{\pi} \mathrm{f}^2 = \frac{\pi}{2}\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots\right), \qquad \int_0^{\pi} (\mathrm{f}')^2 = \frac{\pi}{2}\left(1^2 b_1^2 + 2^2 b_2^2 + 3^2 b_3^2 + \cdots\right).$$

が得られる。右側の各項は左側の対応する項以上であるから、これで $(*)$ が証明され、さらに等号が成り立つのは f が $\sin x$ の定数倍であるときに限ることもわかる。問題の小問 (i) は、項が一つだけの場合にあたる。

振動する弦と量子粒子

比 $\int (\mathrm{f}')^2 / \int \mathrm{f}^2$ は**レイリー商**（Rayleigh quotient）と呼ばれ、$(*)$ は、0 と π で固定された関数に対して、この比のとりうる最小値が 1 であることを述べている。この数には物理的な意味がある。両端を固定された弦では、$\int (\mathrm{f}')^2$ は伸びのエネルギーを、$\int \mathrm{f}^2$ は変位の大きさを表し、この比の最小値が、弦の出せる最も低い音を決める。量子力

学では、同じ最小値が、箱に閉じ込められた粒子の最低エネルギーとなる。両端で固定された波は曲がらざるをえないので、これは 0 にはなりえない。レイリー卿（Lord Rayleigh）はまさにこの技法、すなわち試験関数を推測して比を計算するという方法を用いて、振動系の振動数を評価した。極値の場合が最小値を与えるので、どのような推測も真の最低振動数の上界を与え、よい推測は非常に精度の高い上界を与えるのである。

変分法

積分の比を最小にする関数を求めることは、**変分法**（calculus of variations）の問題である。そこでは未知のものが数ではなく、関数全体である。ここでの最小化関数 $\sin x$ は微分方程式（differential equation）$f'' + f = 0$ を満たすが、これは偶然ではない。積分を最小化すると、必ず最小化関数についての微分方程式が導かれるのである。この考え方には Section 4.7 で再び立ち返る。

次の一歩

1 **4 次式。** $(*)$ で $f(x) = x^2(\pi - x)^2$ を用いよ。これからは $\pi^2 \le 12$ しか得られないことを示せ。なぜこの試験関数は放物線より劣るのだろうか。（その形を $\sin x$ と比べてみよ。）

2 **2 つの正弦波。** $f(x) = \sin x + \sin 2x$ について、両辺を計算して $(*)$ を直接確かめよ。

3 **別の区間。** 置換によって、$g(0) = g(L) = 0$ ならば $\int_0^L g^2 \le \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^L (g')^2$ であることを示せ。これは長さの異なる弦について何を意味するか。

4 **レイリーの方法。** やや難 $f(x) = x(\pi - x) + \lambda x^2(\pi - x)^2$ とし、π^2 に対する評価ができるだけよくなるように λ を選べ。（計算は重い。数式処理システムを使うとよい。）

さらに学ぶために

- **T. W. Körner, *Fourier Analysis***（Cambridge University Press）。フーリエ級数とその応用について、ケンブリッジの解析学者が書いた、すばらしく話題豊富な本である。
- **Hardy, Littlewood & Pólya, *Inequalities***（Cambridge University Press）。第 7 章でウィルティンガーの不等式とその仲間を論じている。
- **Richard Feynman, *The Feynman Lectures on Physics***、第 II 巻第 19 章（「The principle of least action」、最小作用の原理）。積分の最小化についてのファインマン（Feynman）

の講義で、全編を通して物理的直観に満ちている。オンラインで無料で読める。

詳しい解説付きの解答は第 3.7 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/wirtinger.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com