3.6 傾きの上界

ワークシート

問題

STEP I 1988、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s1-q7

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　$f'(x)$ の公式は、f の 3 つの値、すなわち $-1, 0, 1$ における値しか用いていない。なぜ 3 つの値だけで 2 次関数の導関数（derivative）が決まるのだろうか。

段階 1　式

扱う内容：$f'(x)$ の式

? **考えてみよう**　$f(1)$、$f(-1)$、$f(0)$ を a、b、c で表して代入し、x のべきごとに整理せよ。

段階 2 評価

扱う内容：$|f'(x)| \le 4$

考えてみよう 式の両辺の絶対値（absolute value）をとり、$|f(1)|$、$|f(-1)|$、$|f(0)| \le 1$ とともに三角不等式（triangle inequality）を用いよ。x の関数として、$|f'(x)|$ に対してどのような上界が得られるか。

手を止めて、やってみよう 符号に応じて場合分けすることにより、$|x| \le 1$ のとき $\left|x+\frac{1}{2}\right| + \left|x-\frac{1}{2}\right| + 2|x| \le 4$ が成り立つことを示せ。

段階 3　極端な例

扱う内容：等号が成り立つ場合

> **手を止めて、やってみよう**　$x = 1$ で上界が達成されるためには、すべての不等式で等号が成り立たなければならない。$f(1)$、$f(-1)$、$f(0)$ はどのような値をとらなければならないか。それらの点を通る 2 次関数（quadratic）を求めよ。

背後にある数学

マルコフの不等式とチェビシェフ多項式

マルコフは 1889 年に、p が n 次の多項式で $[-1,1]$ 上で $|p(x)| \le 1$ を満たすならば

$$|p'(x)| \le n^2 \qquad \text{ただし} |x| \le 1$$

であることを証明した。$n = 2$ の場合、これは我々の上界 4 である。極端な場合を与えるのは、

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

によって定義される**チェビシェフ多項式**（Chebyshev polynomials）T_n である。たとえば $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ から我々の極端な 2 次関数 $T_2(x) = 2x^2 - 1$ が得られ、$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ から $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ が得られる。$T_n(x) = \cos n\theta$ であるから、これらの多項式は n 次の多項式に可能な限り多く -1 と 1 の間を振動し、両端では可能な限り急な傾きをもつ（図 3.6.1）。マルコフの弟ウラジーミル（Vladimir）は、1892 年にこの結果を高階導関数へと拡張した。

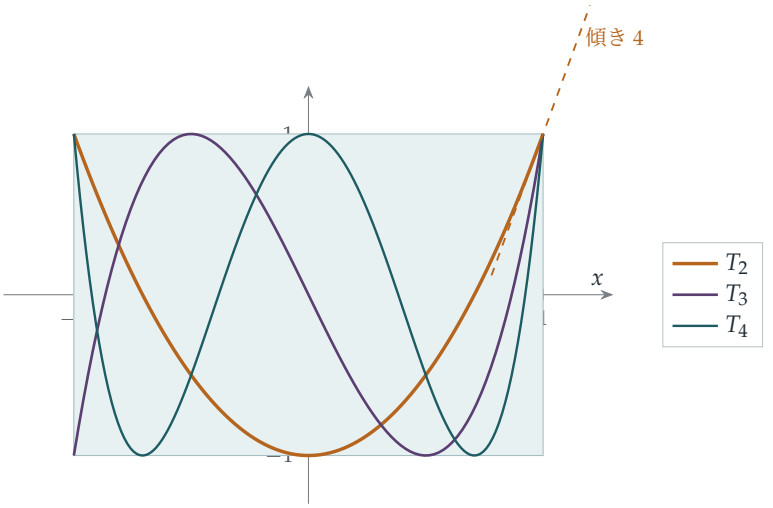

図 3.6.1　チェビシェフ多項式 $T_2 = 2x^2 - 1$、$T_3 = 4x^3 - 3x$、$T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$ は箱 $|x| \le 1, |y| \le 1$ の内部にとどまり、その上辺と下辺に可能な限り多く接する。これらは両端において、同じ次数の多項式の中で最も急な傾きをもつ：$T_n'(1) = n^2$。破線は $x = 1$ における T_2 の接線（tangent）であり、傾きは 4 である。

補間

問題の公式は**ラグランジュ補間**（Lagrange interpolation）の一例である。いくつかの点における関数の値が与えられたとき、それらを通る次数最小のただ一つの多項式を書き下し、それを用いて関数やその導関数を近似するのである。ここでは 3 点は $-1, 0, 1$ である。このような公式は数値解析（numerical analysis）のあらゆる場面で用いられており、たとえば測定データから導関数を推定するのに使われる。マルコフの不等式は、それに付随する警告である。すなわち、値のわずかな誤差が導関数では最大 n^2 倍にまで拡大されうるのであり、これはまさにメンデレーエフが懸念していた問題である。

実用におけるチェビシェフ多項式

チェビシェフ多項式は近似理論（approximation theory）の主力となる道具である。等間隔の点ではなく T_n の根において関数を補間すると、誤差を抑えることができる。等間隔の点を用いると、高次の補間は区間の両端付近でとんでもなく大きく外れることがある（ルンゲ（Runge）現象）。関数をマシン精度いっぱいまで計算したり、微分方程式を非常に高い精度で解いたりするソフトウェアは、内部でチェビシェフ展開を用いていることが多い。

次の一歩

1 **一般的な考え方。** f が 2 次関数ならば $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(-1)\dfrac{x(x-1)}{2} + \mathrm{f}(0)(1-x^2) + \mathrm{f}(1)\dfrac{x(x+1)}{2}$ であることを示し、これを微分して問題の公式を導け。

2 **一意性。** やや難 $[-1,1]$ 上で $|\mathrm{f}(x)| \le 1$ を満たし、かつ $[-1,1]$ のどこかで $|\mathrm{f}'(x)| = 4$ となる 2 次関数は $\pm(2x^2-1)$ に限ることを示せ。

3 **チェビシェフ多項式。** $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を用いて $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ であることを確かめ、$T_3'(1) = 9$ を確認せよ。また $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ を示し、T_4 を求めよ。

4 **T_n の傾き。** $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ を θ について微分することにより $T_n'(\cos\theta) = \dfrac{n\sin n\theta}{\sin\theta}$ を示し、$\theta \to 0$ とすることで $T_n'(1) = n^2$ を導け。

さらに学ぶために

- **Lloyd N. Trefethen, *Approximation Theory and Approximation Practice***（SIAM）。チェビシェフ多項式と補間についての美しい現代的な本で、優秀な高校生でも読むことができ、全編にわたってコンピュータによる実験が盛り込まれている。
- **Peter Borwein & Tamás Erdélyi, *Polynomials and Polynomial Inequalities***（Springer）。マルコフの不等式とその仲間たちの全体像を知るための本。上級者向け。
- **George M. Phillips, *Interpolation and Approximation by Polynomials***（Springer）。ラグランジュ補間、チェビシェフ多項式、マルコフ型の不等式を扱う大学学部向けの教科書。

詳しい解説付きの解答は第 3.6 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/markov-bound.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com