3.5 π^e か e^π か？

ワークシート

問題

STEP II 2013、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s2-q1

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　対数（logarithm）をとると、$a^b = b^a$ は $b\ln a = a\ln b$ と同値である。これを、一方の辺には a だけが、もう一方の辺には b だけが現れるように変形せよ。

段階 1 原点を通る接線

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう $y = mx$ が $x = x_0$ において $y = \ln x$ に接する（touch）とき、成り立つべき二つの等式は何か。

手を止めて、やってみよう $y = mx$ が曲線と $x = a$ および $x = b$ で交わるとき、$\ln a$ と $\ln b$ を m を用いて表せ。m を消去（eliminate）し、両辺の指数をとれ（exponentiate）。

段階 2　原点より上で y 軸と交わる直線

扱う内容：小問 (ii)

手を止めて、やってみよう　今度は $c>0$ として $\ln p = mp+c$ かつ $\ln q = mq+c$ である。$\dfrac{\ln p}{p}$ と $\dfrac{\ln q}{q}$ を m と c を用いて表し、両者を比較せよ。

段階 3 e より右側にある弦

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう $e \le p < q$ のとき、$(p, \ln p)$ から $(q, \ln q)$ への弦（chord）は、点 p における曲線の傾きよりも緩やかである。それはなぜか。このことから、弦の y 切片（y-intercept）について何がわかるか。

手を止めて、やってみよう これと小問 (ii) を、$p = e$、$q = \pi$ として用いよ。

段階 4　接線に平行な弦

扱う内容：小問 (iv)

> **手を止めて、やってみよう**　弦は接線（tangent）$y = \frac{x}{e}$ に平行（parallel）であり、曲線はその接線の下側にある。弦は原点より上で y 軸と交わるか、それとも下で交わるか。そのうえで、c の符号を逆にして小問 (ii) を繰り返せ。

背後にある数学

$\frac{\ln x}{x}$ のグラフ

この問題のすべては、$h(x) = \frac{\ln x}{x}$ のグラフ（図 3.5.1）に見て取ることができる。その導関数（derivative）は $h'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ であるから、h は $(0, e)$ で増加し、$x = e$ で最大値（maximum）$\frac{1}{e}$ をとり、その後は 0 に向かって減少する。0 と $\frac{1}{e}$ の間の高さ m にある水平な直線はグラフと二回交わり、その交点 $a < e < b$ は $h(a) = h(b)$、すなわちまさに $a^b = b^a$ を満たす。e より右側では h は減少するので、$e \le p < q$ ならば $h(p) > h(q)$、すなわち $p^q > q^p$ である。特に $e^\pi > \pi^e$ であり、さらに一般に $x \neq e$ であるすべての x について $e^x > x^e$ が成り立つ。この勝負で e に勝てる数は他にない。

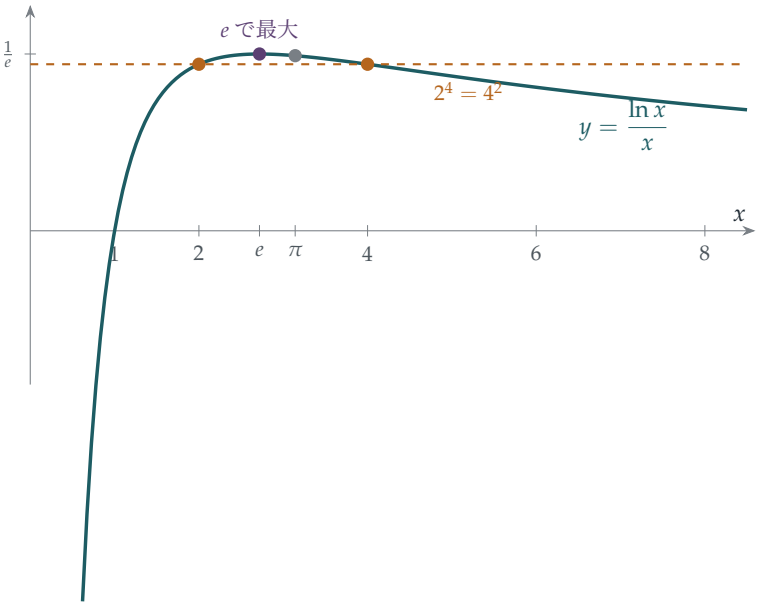

図 3.5.1　$h(x) = \frac{\ln x}{x}$ のグラフ。$x = e$ で最大値 $\frac{1}{e}$ まで上昇し、その後は下降する。$h(e) > h(\pi)$ であるから $e^\pi > \pi^e$ が得られる。高さ $\frac{\ln 2}{2}$ の水平な直線（琥珀色）はグラフと $x = 2$ および $x = 4$ で交わる。これが $n^m = m^n$ を満たす相異なる整数の唯一の組である。

$x^y = y^x$ のすべての解

$x^y = y^x$ を満たす相異なる正の実数の組はどのようなものだろうか。うまい工夫ですべてを求めることができる。$t > 1$ として $y = tx$ とおく。すると $x^{tx} = (tx)^x$ から $x^t = tx$ が得られ、$x^{t-1} = t$、よって

$$x = t^{1/(t-1)}, \qquad y = t^{t/(t-1)}.$$

となる。$t = 1 + \frac{1}{n}$ とおくと $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$、$y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ となる。$n = 1$ のときこれは $(2, 4)$ であり、$n = 2$ のときは $\left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right)$ で、実際に $\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8} = \left(\frac{27}{8}\right)^{9/4}$ が成り立つ。$n \to \infty$ のとき両者はともに e に収束（converge）し、そこで二つの枝が出会う。この問題は 1728 年にダニエル・ベルヌーイ（Daniel Bernoulli）とクリスティアン・ゴールドバッハ（Christian Goldbach）の往復書簡で議論され、のちにオイラー（Euler）も取り上げた。

最も経済的な底

関数 $x^{1/x} = e^{h(x)}$ もまた $x = e$ で最大となる。このことは、ある興味深い問いに答えてくれる。記数法の「コスト」を、底と必要な桁数の積で測るとすると、最も経済的な

底は e であり、整数の中では 3 である（2 をわずかに上回る）。1958 年のソ連の Setun のように、3 を底とする実験的なコンピュータもいくつか作られた。

次の一歩

1. **整数の場合。** STEP I 1988、問 1（step.maths.org/questions/88-s1-q1）に挑戦せよ。
2. **さらなる比較。** STEP II 2025、問 3（OCR が配布している 2025 年の過去問一式に収録、www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip）に挑戦せよ。この節のグラフを用いて a^b と b^a のさらなる比較を決着させる問題であり、その中には e の数値的な評価が決め手となるものも含まれる。
3. **一行の証明。** $x \neq 0$ に対して成り立つ $e^x > 1 + x$ に $x = \frac{\pi}{e} - 1$ を代入して、$e^\pi > \pi^e$ を直接証明せよ。

さらに学ぶために

- **Eli Maor, *e: The Story of a Number***（Princeton University Press）。『不思議な数 e の物語』。e の歴史を述べた本で、方程式 $x^y = y^x$ も扱っている。
- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale***（Princeton University Press）。『虚数の話』。$\sqrt{-1}$ だけを扱った本ではなく、まさにこの種の興味深い計算が満載である。
- **Michael Spivak, *Calculus***（Cambridge University Press）。第 11 章では、導関数を用いてグラフの形を理解する方法が完全な厳密さをもって扱われている。

詳しい解説付きの解答は第 3.5 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/pi-e-or-e-pi.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com