3.4 不等式を証明する面積

ワークシート

問題

STEP III 2011、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s3-q4

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　$\int_0^a \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ は曲線と x 軸の間の面積である。同じ図において、$\int_0^b \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$ はどの部分の面積を表すか。

段階 1 図を描く

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう $\int_0^a \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ は曲線と x 軸の間の面積である。同じ図において、$\int_0^b \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$ はどの部分の面積を表すか？

手を止めて、やってみよう 頂点 $(0,0)$ と (a,b) をもつ長方形を描き、二つの領域に色を塗ってみよ。二つの領域で長方形は覆われるか？はみ出す部分がなくなるのはどのようなときか？

段階 2　ヤングの不等式（Young's inequality）

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう　$\mathrm{f}(x) = x^{p-1}$ のとき、逆関数（inverse function）$\mathrm{f}^{-1}(y)$ は何か？二つの積分をともに計算せよ。

手を止めて、やってみよう　$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を用いて二つ目の積分を簡単にせよ。等号成立（equality）の条件については、小問 (i) の答えを用いよ。

段階 3 逆正弦関数（inverse sine）

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上で $\mathrm{f}(x) = \sin x$ とせよ。$\arcsin y$ はどのように積分すればよいか？$\arcsin y \times 1$ と見て、部分積分（integration by parts）を試してみよ。

手を止めて、やってみよう $\arcsin(t^{-1})$ に関する不等式を導くには、a としてできるだけ簡単な値を選び、$b = \frac{1}{t}$ とおけばよい。

背後にある数学

ヤングからヘルダーへ

William Henry Young は 1912 年にこの不等式を発表した。その重要性は、それが何を導くかにある。$\sum a_i^p = 1$ かつ $\sum b_i^q = 1$ と仮定する。各組にヤングの不等式を適用して加えると

$$\sum a_i b_i \le \frac{\sum a_i^p}{p} + \frac{\sum b_i^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

となる。和が1になるように a たちと b たちを定数倍すると、**ヘルダーの不等式**が得られる。すなわち、正の数に対して

$$\sum a_i b_i \le \left(\sum a_i^{p}\right)^{1/p}\left(\sum b_i^{q}\right)^{1/q}.$$

が成り立つ。$p=q=2$ とすると、これは**コーシー・シュワルツの不等式** $\sum a_i b_i \le \sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2}$ であり、二つのベクトル（vector）のなす角の余弦が1以下であることを述べている。ヘルダーの不等式は L^p 空間の理論の基礎である。L^p 空間とは、「距離」を $\left(\int |f|^p\right)^{1/p}$ で測る関数の空間であり、関数解析（functional analysis）や確率論の講義で出会うことになる。

ルジャンドル変換

図 3.4.1（オンライン版の節全体を参照）の図は、f と f^{-1} を完全に対称に扱っている。$F(a)=\int_0^a \mathrm{f}$、$G(b)=\int_0^b \mathrm{f}^{-1}$ とおく。不等式は $F(a)+G(b)\ge ab$ であり、曲線上で等号が成り立つから

$$G(b)=\max_{a}\bigl(ab-F(a)\bigr).$$

である。凸関数（convex function）F を新しい凸関数 G に変えるこの操作が**ルジャンドル変換**であり、これを二回適用すると F に戻る。力学では、ルジャンドル変換は位置と速度の関数である**ラグランジアン**（Lagrangian）を、位置と運動量の関数である**ハミルトニアン**（Hamiltonian）に変換する。これらはニュートン（Newton）の法則の二つの同値な定式化であり、大学二年次の講義で出会うことになる。熱力学では、内部エネルギー、エンタルピー、自由エネルギーの間の変換を与える。$F(a)=a^p/p$ のとき変換は $G(b)=b^q/q$ となり、これこそがヤングの不等式の二つの指数が $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ で結ばれている理由である。

次の一歩

---

1. **1987年版。** STEP I 1987、問6（step.maths.org/questions/87-s1-q6）に挑戦せよ。同じ種類の図を用いて逆関数を積分する問題である。答えは微分して確かめること。

2. **コーシー・シュワルツ。** $p=q=2$ のヤングの不等式を用いて、正の数に対して $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$ を証明せよ。（**ヒント：**まず二つの平方根がともに1に等しい場合を扱え。）

3. **指数関数版。** $(*)$ において $\mathrm{f}(x)=e^x-1$ とし、$a,b\ge 0$ に対して

$$ab \le e^{a}-1-a+(1+b)\ln(1+b)-b.$$

を示せ。等号が成り立つのはどのようなときか。

4 **この評価はどれほどよいか。**やや難電卓を用いて、$t = 1, 2, 10$ について $\arcsin(1/t)$ と $t - \sqrt{t^2 - 1}$ を比較せよ。t が大きいとき、$t - \sqrt{t^2 - 1} \approx \frac{1}{2t}$ である一方、$\arcsin(1/t) \approx \frac{1}{t}$ であることを示せ。評価がちょうど 2 倍ずれるのはなぜか。（$a = 0$ のときの図を見よ。はみ出しのうちどれだけが無駄になっているか。）

さらに学ぶために

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。『コーシー・シュワルツ・マスタークラス』。第 1 章と第 9 章でコーシー・シュワルツの不等式とヘルダーの不等式を扱い、その途中でヤングの不等式にも触れている。
- **Roger Nelsen, *Proofs Without Words***（Mathematical Association of America）。『言葉のいらない証明』。ヤングの不等式をはじめ、図による証明を数多く収めている。
- **V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics***（Springer）。『古典力学の数学的方法』。第 14 節で、まさにこの図を用いてルジャンドル変換を説明している。高度な内容だが、該当する節は短い。

詳しい解説付きの解答は第 3.4 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/areas-inequalities.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com