3.3 凸性の威力

ワークシート

問題

STEP II 2007、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s2-q7

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

> **考えてみよう**　$(0, \pi)$ 上の $y = \sin x$ のように、下向きに曲がった曲線を描いてみよ。その上に2点をとり、直線で結ぶ。弦は曲線の上にあるか、下にあるか。

段階1　凹性の確認

扱う内容：最初の部分

> **考えてみよう**　$\sin x$ と $\ln x$ の2階導関数（second derivative）を求めよ。与えられた区間において、それらの符号はどうなるか？

段階 2 三角形

扱う内容：小問 (i)

手を止めて、やってみよう $\mathrm{f}(x) = \sin x$ と三つの角 A, B, C に対してイェンセン（Jensen）の不等式を用いよ。これらの角は sin が凹（concave）である区間に含まれているか？また、それらの平均はいくらか？

段階 3 一行で示す相加相乗平均の不等式

扱う内容：小問 (ii)

手を止めて、やってみよう 相加相乗平均の不等式（AM–GM inequality）は積と和を比較するものである。積を和に変える凹関数はどれか？その関数にイェンセンの不等式を適用せよ。

段階 4　相加相乗平均の不等式の利用

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう　最初の不等式について：左辺には四つの項があり、右辺には三つの変数の積がある。四つの数に対して相加相乗平均の不等式を適用せよ。16 はなぜ役に立つのか？

手を止めて、やってみよう　最小値について：$x^5y^5z^5$ の 5 乗根が欲しいので、五つの数を用いよ。残りの二つは何にすべきか？等号が成り立つのはどのようなときか？

背後にある数学

凸関数

大学では、凸（convex）関数（凹を上下逆にしたもの）の標準的な定義は導関数にまったく触れない。f が凸であるとは

$$\mathrm{f}(tx_1 + (1-t)x_2) \le t\,\mathrm{f}(x_1) + (1-t)\,\mathrm{f}(x_2) \qquad \text{任意の} x_1, x_2 \text{と} 0 \le t \le 1,$$

が成り立つことであり、これはまさに弦が曲線より上にあることを述べている。この定義は、$|x|$ のような微分可能（differentiable）でない関数や多変数関数に対しても意味をもつ。デンマークの技術者であり数学者であったヨハン・イェンセン（Johan Jensen）は、1906 年、自らの名を冠する不等式とともに、凸関数をそれ自体一つの研究対象として確立した。

いたるところに現れる凸性

凸性は、数学とその応用のいたるところに現れる。

- **確率論。**イェンセンの不等式によれば、凹関数 f と任意の確率変数（random variable）X に対して $\mathrm{E}[\mathrm{f}(X)] \leq \mathrm{f}(\mathrm{E}[X])$ が成り立つ。経済学では、f を凹な「効用（utility）」関数とすると、これによって、人々が £0 か £200 かが五分五分の賭けよりも確実な £100 を好む理由、そして保険が存在する理由が説明される。
- **情報理論。**データ圧縮の基礎にある、エントロピー（entropy）が一様分布（uniform distribution）で最大になるという事実の証明は、ln に対するイェンセンの不等式である。
- **最適化。**凸関数には大域的最小値（global minimum）以外に局所最小値（local minima）がないので、「坂を下る」ことで必ず最良の答えが見つかる。凸最適化問題が効率よく解けるのはこのためであり、問題を凸な形に書き直すことに多大な努力が注がれるのもこのためである。

Section 3.4 では、凸性の別の側面、すなわち関数とその逆関数の間の幾何学的な双対性（duality）を見ることになる。

次の一歩

1. **定義。**STEP II 2018、問 2（step.maths.org/questions/18-s2-q2）の小問 (i) と (ii) は、上の囲みにある弦による凹性の定義から出発し、3 点に対するイェンセンの不等式を導くものである。

2. **正弦の積。**STEP II 2018、問 2（step.maths.org/questions/18-s2-q2）の小問 (iii) に取り組んでみよ。

3. **鋭角三角形。**$\tan x$ が $(0, \frac{\pi}{2})$ 上で凸であることを示し、鋭角三角形（acute-angled triangle）において $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$ が成り立つことを導け。

4. **冪平均（power means）。**x^2 が凸であることを示し、$\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}$ を導

け。これを、数の集まりの分散（variance）についての主張として解釈せよ。

さらに学ぶために

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。第 6 章は凸性とイェンセンの不等式を扱っている。
- **Claudi Alsina & Roger Nelsen, *When Less Is More: Visualizing Basic Inequalities***（Mathematical Association of America）。図によって証明される不等式を集めたもので、その多くが凸性を用いている。
- **Stephen Boyd & Lieven Vandenberghe, *Convex Optimization***（Cambridge University Press）。現代の古典で、オンラインで無料で読める。最初の数章では、凸性が実践においてなぜ重要なのかが示されている。

詳しい解説付きの解答は第 3.3 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/convexity.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com