3.2 相加・相乗平均を逆向きに

ワークシート

問題

STEP II 1993、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s2-q8

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　n 個から $n+1$ 個へ進むよりも、2^m 個から 2^{m+1} 個へ進むほうが易しいのはなぜだろうか。

段階 1　2 つの数

扱う内容：2 つの数の場合

? **考えてみよう**　$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - a_1a_2$ を展開し、平方の形に書き直せ。

段階 2 倍にする

扱う内容：m についての帰納法（induction）

考えてみよう 2^{m+1} 個の数を前半と後半に分ける。P と Q をそれぞれ前半と後半の相加平均（arithmetic mean）とする。帰納法の仮定（inductive hypothesis）から、それぞれの半分について何がいえるか。

手を止めて、やってみよう 2 つの結果を掛け合わせ、P と Q に 2 つの数の場合を適用せよ。$\frac{P+Q}{2}$ は何になるか。

段階 3　隙間を埋める

扱う内容：任意の個数の項

考えてみよう　オンラインのアーカイブに収められた問題用紙には誤植がある。$b_1 = a_2$ は $b_1 = a_1$ が正しい。項を補った列 $b_1, \dots, b_{2^m}$ の平均はいくらか。

手を止めて、やってみよう　b たちに $(*)$ を適用し、両辺を A の適切なべき乗で割ってから n 乗根をとれ。

背後にある数学

コーシーの帰納法

コーシーはこの証明を著書 *Cours d'analyse*（『解析教程』、1821 年）で発表した。この本は、第 2 章で論じた解析学の厳密な扱いの出発点となったものである。この手法は現在**前進・後退帰納法**（forward–backward induction）と呼ばれている。無限個の場合からなる列（ここでは 2 の累乗）について命題を証明し、次に n の場合から $n-1$ の場合が導かれることを示す。この 2 つを合わせれば、すべての n に到達する。本節

の段階 3 では 2^m から n へ一気に下りたが、1 段ずつ下りることもできる。$n-1$ 個の数にその平均の複製を 1 個付け加えれば、n の場合から $n-1$ の場合が導かれることがわかる。

---

1 つの不等式の多くの証明

AM–GM には何十通りもの証明があり、それらを比べることは数学のさまざまな流儀を知るよい方法である。

- **凸性による証明。** 対数関数は凹関数（concave function）なので、対数の平均は平均の対数以下である。指数をとればこれが AM–GM であり、Section 3.3 の主題でもある。
- **ポリア（George Pólya）の証明。** $e^{x-1} \geq x$ を使う（$x=1$ における e^{x-1} の接線は曲線の下側にある）。A を平均として、これを各 a_i/A に適用して掛け合わせると、$\prod \frac{a_i}{A} \leq e^{\sum (a_i/A - 1)} = e^0 = 1$ となる。ポリアは、この証明を夢の中で思いついたと語っている。
- **均す方法による証明。** 2 つの数が等しくなければ、その両方をそれらの平均で置き換える。相加平均は変わらず、2 つの数の場合から積は増える。これを繰り返すと、すべての数が平均へと近づいていく。

微積分を使わない最適化

AM–GM を使うと、多くの最適化問題が 1 行で解ける。表面積が与えられた箱のうち、体積が最大となるのはどれか。周の長さが与えられた長方形のうち、面積が最大となるのはどれか。（正方形である。2 つの数の場合から $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ であり、等号は $x=y$ のときに成り立つ。）等号成立条件は最適値がどこにあるかを教えてくれ、不等式はそれが単なる停留点（stationary point）ではなく本当に最適値であることを教えてくれる。Section 3.1 での注意と比べてみよ。

次の一歩

1. **1 段下りる。** n 個の数に対して AM–GM が成り立つならば、$n-1$ 個の数に対しても成り立つことを、平均の複製を 1 個付け加えることで直接示せ。
2. **増加数列。** $n+1$ 個の数 $1+\frac{1}{n}, \ldots, 1+\frac{1}{n}, 1$（$1+\frac{1}{n}$ が n 個）に AM–GM を適用して、$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ を示せ。

3 **最良の箱。** ふたのある直方体の箱の表面積が S である。互いに異なる 3 つの面の面積に AM–GM を用いて、体積が $(S/6)^{3/2}$ 以下であり、等号は立方体のときに成り立つことを示せ。

4 **調和平均。** 数 $1/a_i$ に AM–GM を適用して、調和平均（harmonic mean）$\dfrac{n}{1/a_1 + \cdots + 1/a_n}$ が相乗平均以下であることを示せ。

さらに学ぶために

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。不等式について問題を軸に展開するすばらしい本で、ちょうどこの水準から始まる。第 2 章は AM–GM を扱っている。
- **Hardy, Littlewood & Pólya, *Inequalities***（Cambridge University Press）。20 世紀の偉大な解析学者 3 人による古典的な参考書である。
- **Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies***（Springer）。第 7 章はオリンピックの不等式の問題を大量に集めたものである。

詳しい解説付きの解答は第 3.2 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/am-gm-backwards.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com