3.1 誤りを見抜け

ワークシート

問題

STEP I 1991、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s1-q6

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　「各段階を批判せよ」と言われたとき、各段階で何を確かめればよいだろうか。取りかかる前に一覧を作ってみよう。

段階 1 導関数は正しいか？

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう 商の微分法（quotient rule）を用いて自分で g を微分し、分子を因数分解せよ。$g'(x) = 0$ となるのはどこか？

手を止めて、やってみよう 因数分解した $g'(x)$ に $x = 1$ と $x = -1$ を直接代入して確かめよ。これらは停留点（stationary point）であるか？

段階 2　値は正しいか？

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　$g(0)$、$g(1)$、$g(-1)$ を自分で計算せよ。議論の中の値と一致するか？

段階 3 値を比べれば、どちらが極大かわかるか？

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう ある関数がちょうど 2 つの停留点をもち、そこでの値が $\frac{3}{4}$ と 1 であるとする。前者は必ず極小（minimum）で、後者は必ず極大（maximum）であるといえるか？

手を止めて、やってみよう 0 の両側での $g'(x)$ の符号から、$x = 0$ における停留点の種類を判定せよ。

段階 4　停留点での値は関数の値の範囲を限定するか？

扱う内容：小問 (i)

手を止めて、やってみよう　そもそも結論は正しいのか？$x \to \pm\infty$ のとき $\mathrm{g}(x)$ はどうなるか。また、$\mathrm{g}(x)$ が負になるのはどのようなときか。$\mathrm{g}(x) < \frac{3}{4}$ となる x を探せ。

段階 5 積分

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう $-3(1-x)^{-4}$ を微分せよ。$(1-x)^{-3}$ になるか？

考えてみよう 正しい原始関数（antiderivative）を用いても、答えはやはり 0 になる。では、結論は結局正しかったのだろうか？

手を止めて、やってみよう 微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）を使うには、被積分関数（integrand）が区間全体で連続（continuous）でなければならない。$(1-x)^{-3}$ は $[-1,3]$ で連続か？問題の点の近くで積分はどうなるか？

背後にある数学

偉大な数学者が誤ったとき

まさにこの種の誤りを、解析学の創始者たちも犯していた。1821年の『*Cours d'analyse*』（解析教程）で、コーシー（Augustin-Louis Cauchy）は連続関数の収束する和は常に連続であると「証明」した。1826年、アーベル（Niels Henrik Abel）は反例を指摘した。フーリエ級数（Fourier series）

$$\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \cdots$$

はすべての x で収束し、各項は連続であるが、その和は $x = \pm\pi$ で跳ぶ（$-\pi < x < \pi$ では $x/2$ に等しい）。コーシーの論証のどこが誤っていたのかを正確に突き止めるには数十年を要し、その結果として生まれたのが**一様収束**（uniform convergence）の概念である。これは今ではすべての解析学の学生が学ぶ。隠れた仮定、とりわけ二つの極限の順序を入れ替えることに関わる仮定は、解析学全体で最もよくある誤りの原因である。

仮定をもつ定理

この問題に含まれる誤りのうち二つは、定理の仮定を無視したことから生じている。

- **最大値・最小値の定理**（extreme value theorem）は、有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数は最大値と最小値をとることを述べている。それを求めるには、区間の端点、停留点、そして関数が微分可能でない点を調べる。$[-1,1]$ 上の $|x|$ の最小値は0でとられるが、これは端点でも停留点でもない。f が区間の内部のいたるところで微分可能であれば、内部でとる最大値・最小値は停留点でとられなければならない。実数全体では調べるべき端点がなく、関数が最大値をもたないこともある。その代わりに $x \to \pm\infty$ での振る舞いを調べなければならない。
- **微分積分学の基本定理**は、被積分関数が $[a,b]$ 上で連続であることを必要とする。連続でない場合、積分はそれでも存在することもあれば（$\int_0^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ を試してみよ）、存在しないこともあり（ここでのように）、極限を用いて確かめなければならない。

大学で出会う定理には、すべて仮定の正確な一覧がついている。定理を使う前に毎回それを確かめることも、訓練の一部である。

発散する積分の値

小問 (ii) には興味深い補足がある。区間 $[-1,3]$ は問題の点 $x=1$ に関して対称であり、$(1-x)^{-3}$ はその点に関して「奇関数」的である。対称な隙間 $(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ を取り除いて $\varepsilon\to 0$ とすると、二つの無限大の部分が打ち消し合い、確かに 0 が得られる。これを**コーシーの主値**（Cauchy principal value）といい、物理学や複素解析で実際に役立つものである。しかしそれは意図的に選ばれた**別の定義**であり、偶然そこにたどり着いた論証は何も証明していない。

次の一歩

1. **嘘をつく置換。** STEP I 1987、問 8（step.maths.org/questions/87-s1-q8）に挑戦せよ。置換積分によって、正の積分が負の積分に等しいことが示されるように見える。論証がどこで破綻するかを正確に突き止め、そのうえで両方の積分を正しく計算せよ。

2. **真か偽か。** STEP I 1998、問 3（step.maths.org/questions/98-s1-q3）に挑戦せよ。証明するか反証するかを求める四つの主張がある。それぞれについて、書き始める前にどちらになると予想するかを決めておこう。

3. **すべての馬は同じ色である。** 帰納法（induction）によるこの「証明」の誤りを見つけよ。任意の 1 頭の馬はそれ自身と同じ色である。$n+1$ 頭の馬が与えられたとき、帰納法の仮定により最初の n 頭は同じ色であり、最後の n 頭も同じ色である。二つの群は重なり合っているので、$n+1$ 頭すべてが同じ色である。

4. **存在する積分。** 被積分関数が 0 で定義されていないにもかかわらず $\int_{-1}^{1}|x|^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ が存在することを示し、その値を求めよ。

さらに学ぶために

- **E. A. Maxwell, *Fallacies in Mathematics***（Cambridge University Press）。もっともらしく見える誤った論証を分野別にまとめた古典的な本で、シックスフォーム（sixth form、英国の大学進学準備課程）の生徒向けに書かれている。
- **Bernard Gelbaum & John Olmsted, *Counterexamples in Analysis***（Dover）。定理の仮定がなぜ重要なのかを示す数百の例を収めている。解析学の講義を受け始めたら、ところどころ拾い読みするとよい。
- **Imre Lakatos, *Proofs and Refutations***（Cambridge University Press）。数学者が証明の誤りをどのように見つけ、修正するのかを描いた見事な対話篇。

詳しい解説付きの解答は第 3.1 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/spot-the-flaw.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com