2.9 e に迫る分数

ワークシート

問題

STEP II 2021、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　$[0,1]$ 上での $t(1-t)$ の最大値はいくつか。そこから、n が大きくなるときの T_n の大きさについて何がわかるか。

段階 1　2 回微分する

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　$p(t) = t^n(1-t)^n = [t(1-t)]^n$ とおく。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t(1-t)] = 1-2t$ を用いて、1 回微分（differentiate）せよ。

手を止めて、やってみよう　もう一度微分し、共通因数（common factor）$n\,t^{n-2}(1-t)^{n-2}$ をくくり出せ。求める形に合わせるには、$(1-2t)^2$ を $t(1-t)$ を用いて表せばよい。

段階 2　2 回部分積分する

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう　$p(t)$ は $t=0$ と $t=1$ で 0 になる。$n \geq 2$ のとき、$p'(t)$ はどうか。$p(t)\,e^{t}$ を部分積分（integration by parts）するとき、そのことがなぜ重要なのか。

手を止めて、やってみよう　p'' が現れるように 2 回部分積分せよ。小問 (i) を用い、$n!$ で割って、二つの積分が何であるかを見抜け。

段階 3 整数の構造

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう 部分積分によって、T_0 と T_1 を直接計算せよ。

手を止めて、やってみよう どちらも整数 a, b を用いて $a + be$ の形をしている。小問 (ii) の漸化式（recurrence relation）によってその形が保たれるのはなぜか。

段階 4　小さいからこそ情報をもたらす

扱う内容：小問 (iv)

考えてみよう　$0 < t < 1$ において、$t^n(1-t)^n$ と e^t を評価せよ。そこから T_n について何がわかるか。

手を止めて、やってみよう　$0 < a_n + b_n e < \frac{e}{n!}$ を $|b_n|$ で割れ。これは e と $-a_n/b_n$ の距離について何を意味するか。

背後にある数学

e が無理数であることの別証明

この問題は、ある有名な定理のすぐ手前で止まっている。p, q を正の整数として $e = p/q$ と仮定する。すると

$$q\,T_n = q a_n + b_n p$$

は**整数**である。ところが $0 < q\,T_n < \dfrac{qe}{n!}$ であり、n が大きければ右辺は 1 より小さい。すると qT_n は 0 と 1 の間に厳密に挟まれた整数ということになり、これは不可能である。よって e は無理数（irrational number）である。これは Section 1.4 で見た「整

数を 0 と 1 の間に閉じ込める」という考え方を、級数の代わりに積分で実現したものである。$t^n(1-t)^n$ のような多項式を含む、まさにこの種の積分を用いて、シャルル・エルミートは 1873 年に e が**超越数**（transcendental number）であること、すなわち整数係数のどんな多項式の根にもならないことを証明した。

連分数

表の分数は単に良い近似であるだけではない。それらは**最良**の近似の一部なのである。オイラー（Euler）が発見した e の連分数（continued fraction）展開には、美しい規則性がある：

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots],$$

そしてその近似分数（convergent）は $2, 3, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \ldots, \frac{2721}{1001}, \ldots$ である。私たちの $-a_n/b_n$ は、ちょうど 3 つおきの近似分数になっている。これより小さい分母をもつ分数で、e にこれ以上近いものは存在しない。オイラーが見出したこの規則性そのものが、e が無理数であることの最初の証明であった。有限の連分数をもつのは有理数だけだからである。

アペリーの奇跡

1978 年、ロジェ・アペリー（Roger Apéry）は、オイラー以来未解決であった問題（Section 2.3 を参照）、すなわち $\zeta(3) = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$ が無理数であることの証明を発表した。その証明はあまりに意外なものであったため、聴衆は当初それを信じなかった。1 年後、Frits Beukers は次の形の積分を用いた短い証明を見つけた：

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{-\ln(xy)}{1-xy}\, P_n(x) P_n(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

ここで P_n は $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n(1-x)^n\right)$ から作られる。これらの積分は小さく、正であり、「整数 + 整数 $\times\, \zeta(3)$」を制御された分母で割った形をしている。まさにこの問題と同じ戦略である。$\zeta(5)$ や $e + \pi$ が無理数かどうかは、いまだにわかっていない。

次の一歩

1. **漸化式を回してみる。** $n = 2, 3, 4$ について漸化式から a_n と b_n を計算し、表の分数を確かめよ。b_n の符号が交互に変わることを示せ。

2. **より鋭い評価。** $0 < T_n < \dfrac{e}{4^n\, n!}$ を示せ。これによって $-a_n/b_n$ の誤差評価はどれだけ改善されるか。

3 **無理性の証明。** 上の囲みの議論を丁寧に書き下せ。$T_n > 0$ であることは、正確にはどこで使われているか。

4 **別の重み。** やや難 e^t を e^{2t} に置き換えて（すなわち $U_n = \int_0^1 \frac{t^n(1-t)^n}{n!} e^{2t}\,\mathrm{d}t$ として）問題をやり直せ。U_n の漸化式を求め、U_n が 1 と e^2 の有理数係数の結合であることを示し、この議論で e^2 が無理数であることがなお証明できるかどうかを調べよ。（Section 1.4 と比較せよ。）

さらに学ぶために

- **Ivan Niven, *Irrational Numbers*** (Mathematical Association of America)。無理性の証明についての古典的な小著で、エルミートの方法も扱っている。
- **Alfred van der Poorten, 「A proof that Euler missed」**, *The Mathematical Intelligencer* 1 (1979)。アペリーの証明とその受け止められ方を生き生きと描いた記事。
- **Julian Havil, *The Irrationals*** (Princeton University Press)。数学に関心のある一般読者向けに書かれた無理数の歴史。

詳しい解説付きの解答は第 2.9 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/e-approximations.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com