2.8 2乗して2を引く

ワークシート

問題

STEP III 2021、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　$[-2, 2]$ の中の数が決して外へ逃げ出せないのはなぜか。$-2 \le x \le 2$ のとき、$x^2 - 2$ の最大値と最小値はいくらか。

段階 1 脱出（escape）

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう 4^{n-1} という形から、2 を超える分の距離は各ステップで少なくとも 4 倍になると予想できる。$x_n = 2 + d$ とおくと、x_{n+1} は d を用いてどう表されるか。

手を止めて、やってみよう これを n に関する帰納法（induction）に用いよ。まず $n = 1$ の場合を確かめること。

段階2　$|a| > 2$ のとき、かつそのときに限り脱出する

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう　「〜のとき、かつそのときに限り」（if and only if）とは、二つの別々の証明が必要だということである。小問 (i) で一方の向きはほぼ示されている。$a < -2$ のときには何を追加で示す必要があるか。

手を止めて、やってみよう　もう一方の向きについて：$-2 \le x \le 2$ のとき、$x^2 - 2$ はどれだけ大きく、またどれだけ小さくなりうるか。

段階 3 隠れた公式

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう $a > 2$ ならば、$a = t + \frac{1}{t}$ を満たす数 $t > 1$ が存在する。それはなぜか。

手を止めて、やってみよう x_2 と x_3 を t で表してみよ。x_n にはどのような規則性があるか。

段階 4　積が次々に打ち消し合う（telescoping）

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう　$\left(t-\frac{1}{t}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)$ はいくらか。その結果に $t^2+\frac{1}{t^2}$ を掛けよ。$\left(t-\frac{1}{t}\right)x_1x_2\cdots x_n$ はどうなるか。

手を止めて、やってみよう　x_{n+1}^2-4 を t で表し、それを先ほどの積と比べよ。y_n の二つの表示が一致するのは A がどの値のときか。また、a は A を用いてどう表されるか。

段階 5 y_n は収束（converge）するか

扱う内容：小問 (iii)

> **考えてみよう** この a の値のもとで、y_n を x_{n+1} だけで表せ。小問 (ii) から x_{n+1} について何がわかるか。

背後にある数学

秩序とカオス

$[-2,2]$ の内側では何が起こるのか。そこでは $a = t + 1/t$ はうまくいかない（$|a| \geq 2$ が必要である）が、三角関数による類似がうまくいく。$a = 2\cos\theta$ と書くのである。すると $x_2 = 4\cos^2\theta - 2 = 2\cos 2\theta$ であり、一般に

$$x_n = 2\cos(2^{n-1}\theta).$$

となる。つまり区間の内側では、この写像（map）は単に**角を 2 倍する**だけである。無害に聞こえるが、角の 2 倍はカオス的である。θ/π を 2 進法（binary）で書くと、2 倍することは小数点を 1 桁右へずらし、先頭の桁を捨てることにあたる。50 ステップ後には x_n は θ/π の 2 進展開の第 51 桁に依存するので、初期値の誤差が 10^{-15}（一般的なコンピュータの精度）であっても、50 ステップ後の答えはまったく信頼できなくなる。この初期値鋭敏性（sensitive dependence on initial conditions）こそがカオスの特徴であり、図 2.8.1 に示されている。写像 $x \mapsto x^2 - 2$ は、変数変換によって有名なロジスティック写像（logistic map）$x \mapsto 4x(1-x)$ と同値であり、これには Section 8.7 で再会する。

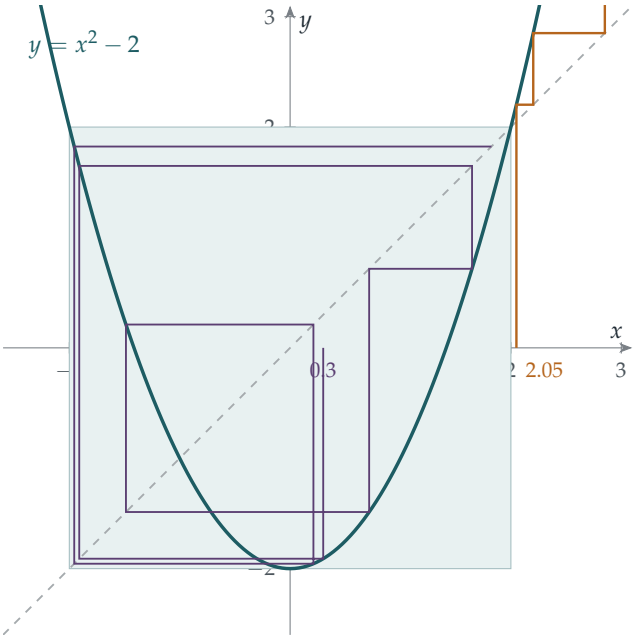

図 2.8.1　$x_{n+1} = x_n^2 - 2$ のクモの巣図（cobweb diagram）。0.3 から出発した軌道（紫）は、網かけの正方形 $[-2,2]^2$ に永遠にとどまり、カオス的にさまよう。そのすぐ外の 2.05 から出発した軌道（琥珀色）は逃げ出す：$2.05, 2.20, 2.85, 6.13, \ldots$

最大の素数を見つける

メルセンヌ数（Mersenne number）とは $M_p = 2^p - 1$ のことである。1876 年にエドゥアール・リュカ（Édouard Lucas）が発見し、1930 年にデリック・レーマー（Derrick Lehmer）が完成させた、M_p が素数かどうか（p は奇素数）を判定する見事な方法がある。$s_0 = 4$ から出発し、毎回 M_p を法として簡約しながら、2 乗して 2 を引くことを繰り返す。このとき

$$M_p \text{ は素数} \iff s_{p-2} \equiv 0 \pmod{M_p}.$$

$M_7 = 127$ の場合：$s = 4, 14, 194 \equiv 67, 67^2 - 2 \equiv 42, 42^2 - 2 \equiv 111, 111^2 - 2 \equiv 0$ であるから、127 は素数である。本問との関係は置き換えにある。$t = 2 + \sqrt{3}$ とすると $4 = t + 1/t$ であるから、$s_k = (2+\sqrt{3})^{2^k} + (2-\sqrt{3})^{2^k}$ となり、判定法の証明では Section 1.6 のガウス整数（Gaussian integers）とよく似た、$a + b\sqrt{3}$ の形の数の算術を用いる。各ステップで必要なのは 2 乗 1 回だけなので、この判定法は極めて高速である。既知の最大級の素数のほとんどが、現在の記録保持者も含めてメルセンヌ素数であるのはこのためである（すべてがそうではない。$a^{2^n} + 1$ のような他の特別な形にも、それぞれ独自の高速判定法がある）。執筆時点での記録は 2024 年に発見された

$2^{136279841}-1$ であり、41 百万桁を超える数である。

マンデルブロ集合

-2 を任意の定数 c に置き換え、複素数も許すことにする：$z \mapsto z^2+c$。0 の軌道が有界にとどまるような c 全体の集合が**マンデルブロ集合**（Mandelbrot set）である。本問の写像は $c=-2$ であり、これはマンデルブロ集合の最も左の点である。そして軌道が有界にとどまる初期値全体の集合（その**ジュリア集合**（Julia set））は、小問 (ii) で見つけた区間 $[-2,2]$ にちょうど一致する。他のほとんどすべての c に対しては、この集合はフラクタル（fractal）になる。

次の一歩

1. **区間の内側。** $a=2\cos\theta$ ならば $x_n=2\cos(2^{n-1}\theta)$ であることを証明せよ。$x_3=a$ であるが $x_2\neq a$ となる a の値をすべて求めよ（**ヒント：**2π を法として $4\theta\equiv\pm\theta$ となればよい）。

2. **手計算によるルーカス–レーマー判定法。** この判定法を用いて、$M_5=31$ は素数であり、$M_{11}=2047$ は素数でないことを示せ（M_{11} では 9 ステップが必要であり、電卓があると便利である。2047 を素因数分解して結論を確かめよ）。

3. **具体例。** $A=\frac{3}{2}$ とする。a と t を求め、公式 $y_1=\sqrt{x_2^2-4}/x_2$ を数値的に確かめよ。

4. **次々に打ち消し合う和。** やや難 $a=t+1/t$、$t>1$ のとき、

$$\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}=\frac{t-t^{-1}}{t^{2^n}-t^{-2^n}}.$$

   であることを示せ。恒等式 $\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z^2-1}=\dfrac{z}{z^2-1}$ を $z=t^{2^n}$ として用いて、

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_2x_3}+\cdots=\frac{1}{t}.$$

   を導け。$a=3$ のときにこれを数値的に確かめよ。

さらに学ぶために

- **Ian Stewart, *Does God Play Dice?***（Penguin）。ロジスティック写像を含む、カオスについての古典的な一般向け解説書。
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。大学学部向けの定番の入門書。第 10 章は本問のような 1 次元写像を扱っている。

- **Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes***（Fourth Estate）。メルセンヌ素数探索の物語を含む。

詳しい解説付きの解答は第 2.8 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/squaring-minus-two.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com