2.7 6 桁か、600 桁か

ワークシート

問題

STEP II 2023、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

> **考えてみよう**　二つのリストについて何か気づくことはあるだろうか。（両方に現れる分数に注目せよ。）

段階 1　第 1 の方法は常に 1 以上である

扱う内容：小問 (i)

> **考えてみよう**　x_{n+1} を $1+\dfrac{1}{\text{何か}}$ の形に書き直せ。そのうえで数学的帰納法（induction）を用いよ。

段階 2 第 1 の方法の誤差（error）

扱う内容：小問 (i)

手を止めて、やってみよう $x_{n+1}^2 - 2$ を x_n を用いて一つの分数として表せ。分子（numerator）について何か気づくことはあるか。$\frac{1}{(x_n+1)^2}$ はどれほど小さくなければならないか。

段階 3 10 回の反復

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう x_0 から始めて、この不等式（inequality）を 10 回適用せよ。不等号の向きについては、$x_n^2 - 2$ の符号を追えばよい。各段階でその符号はどうなるか。

段階 4　第 2 の方法の誤差

扱う内容：小問 (ii)

手を止めて、やってみよう　$y_{n+1}-\sqrt{2}$ を一つの分数として表せ。分子は完全平方式（perfect square）を思い起こさせるはずである。そのうえで、数学的帰納法により $y_n \geq 1$ を示せ。

段階 5 誤差が 2 乗される

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう $e_n = y_n - \sqrt{2}$ とおく。$y_n \geq 1$ を用いて、e_{n+1} を e_n^2 で上から評価せよ。

手を止めて、やってみよう $r = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ として、$n \geq 1$ に対して $e_n \leq 2r^{2^n}$ を数学的帰納法で証明せよ。初期段階（base case）は注意深く確認すること。

段階 6　600 桁

扱う内容：小問 (ii)

> **考えてみよう**　r は $\frac{1}{4}$ と比べてどうか。次に、2^{10} と 10^3 を比較せよ。

背後にある数学

ニュートン法

二つ目の方法は、$f(y) = y^2 - 2$ に**ニュートン法**（Newton's method）を適用したものである。ニュートン（Newton）法は、推測値 y を、y における接線が軸と交わる点で置き換えることを繰り返して、f の根を求める。

$$y_{\text{new}} = y - \frac{f(y)}{f'(y)} = y - \frac{y^2 - 2}{2y} = \frac{y^2 + 2}{2y}.$$

単根（simple root）α の近くでは、テイラー展開（Taylor expansion）により新しい誤差はおよそ $\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \times (\text{古い誤差})^2$ であることがわかる。これがニュートン法が 2 次収束（quadratic convergence）する理由である。この特別な場合、すなわち「y と $2/y$ の平均をとる」方法はバビロニア人に知られていた。紀元前 1700 年頃の粘土板で、現在 YBC 7289 と呼ばれているものには、$\sqrt{2}$ が 60 進法で、誤差 100 万分の 1 未満で記されている。

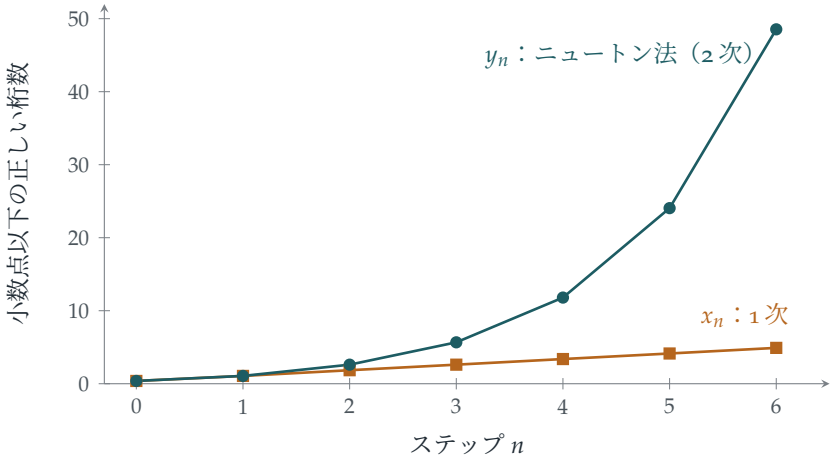

図 2.7.1　それぞれの方法で n ステップ後に得られる $\sqrt{2}$ の小数点以下の正しい桁数。1次の方法は1ステップごとに約 0.77 桁ずつ増える。ニュートン法では各ステップで正しい桁数がおよそ2倍になり、$n = 10$ では約 780 桁に達する。

不動点と収束の速さ

どちらの方法も $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ を満たす g によって $u_{n+1} = g(u_n)$ という形をしているので、$\sqrt{2}$ は**不動点**（fixed point）である。これは Section 2.2 のクモの巣図と同じ状況である。不動点 α の近くでは、誤差は各ステップでおよそ $g'(\alpha)$ 倍される。一つ目の方法では $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$ であり、$g'(\sqrt{2}) = -\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2} = -(3-2\sqrt{2}) \approx -0.17$ である。負の符号は符号が交互に変わることを説明し、0.17 という値は1ステップあたり 0.77 桁という増え方を説明する（$\log_{10}(1/0.17) \approx 0.77$）。ニュートン法では $g'(\alpha) = 0$ なので、1次の項が消え、誤差は次の項、すなわち2乗の項で決まる。$g'(\alpha) = 0$ となる反復を設計することこそ、高速な数値計算法の技である。

同じ分数が現れる理由

分数 $x_n = p_n/q_n$ は $p_{n+1} = p_n + 2q_n$、$q_{n+1} = p_n + q_n$ を満たし、さらに $p_n^2 - 2q_n^2 = \pm 1$（符号は交互）を満たす。これらは**ペル方程式**（Pell's equation）$p^2 - 2q^2 = \pm 1$ の解であり、連分数（continued fraction）$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$ の近似分数（convergents）である。これらは $1 + \sqrt{2}$ のべきから得られる：$p_n + q_n\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^{n+1}$。ニュートン法の1ステップは $p + q\sqrt{2}$ を**2乗**する（確かめてみよ：$(p+q\sqrt{2})^2 = p^2 + 2q^2 + 2pq\sqrt{2}$ であり、$\frac{p^2+2q^2}{2pq}$ はちょうど p/q にニュートン法の式を適用したものである）。2乗すると指数が2倍になる。これが $y_n = x_{2^n-1}$ となる理由である。同じ「2乗」のパターンが Section 2.8 の反復も動かしている。

次の一歩

1 **ペル方程式。**$y_n = p/q$ が既約分数で $p^2 - 2q^2 = 1$ を満たすならば、$y_{n+1} = \dfrac{p^2 + 2q^2}{2pq}$ もこの方程式を満たすことを示せ。また $577^2 - 2 \times 408^2 = 1$ を確かめよ。

2 **立方根。**$f(y) = y^3 - 2$ に対するニュートン法を書き下し、$\alpha = \sqrt[3]{2}$ とするとき新しい誤差が $\dfrac{(y_n - \alpha)^2(2y_n + \alpha)}{3y_n^2}$ であることを示せ。これより、$y_n > \alpha$ ならば新しい誤差は古い誤差の 2 乗の高々 $\frac{1}{\alpha}$ 倍であることを導け。（**ヒント：**$\alpha^3 = 2$ を用いよ。）

3 **割らずに割り算をする。**$f(y) = \frac{1}{y} - a$ に対するニュートン法から $y_{n+1} = y_n(2 - ay_n)$ が得られ、これには割り算が不要であることを示せ。$e_n = 1 - ay_n$ とするとき、$e_{n+1} = e_n^2$ であることを示せ。（コンピュータのプロセッサは、このような反復を用いて割り算を行う。）

4 **ニュートン法がうまくいかないとき。**唯一の根が 0 である $f(y) = y^{1/3}$ にニュートン法を適用せよ。どこから始めても、各ステップで根からの距離が 2 倍になることを示せ。誤差の公式のどの仮定が成り立っていないか。

さらに学ぶために

- **Endre Süli & David Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis***（Cambridge University Press）。『数値解析入門』。学部向けの標準的な教科書で、第 1 章で不動点反復とニュートン法を扱っている。
- **Nick Higham (ed.), *The Princeton Companion to Applied Mathematics***（Princeton University Press）。『プリンストン応用数学事典』。ニュートン法や数値解析についての短い記事が、専門家によって幅広い読者向けに書かれている。
- **David Fowler & Eleanor Robson, “Square root approximations in Old Babylonian mathematics: YBC 7289 in context”,** *Historia Mathematica* 25 (1998)。古バビロニア数学における平方根の近似を YBC 7289 の文脈で論じた論文。

詳しい解説付きの解答は第 2.7 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/newton-speed.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com