2.6 算術幾何平均

ワークシート

問題

STEP II 2024、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　相異なる 2 つの正の数の相加平均が、つねに相乗平均より大きいのはなぜか。1 行で証明できるだろうか。

段階 1　2 つの数列は挟まれて近づいていく

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　問題文のヒント $(\sqrt{x_n}-\sqrt{y_n})^2>0$ を使え。これは x_{n+1} と y_{n+1} について何を述べているか。

考えてみよう　なぜ $x_{n+1}<x_n$ かつ $y_{n+1}>y_n$ となるのか。このことから 2 つの数列（sequence）について何がわかるか。

手を止めて、やってみよう　差については、$x_{n+1}-y_{n+1}$ を $x_{n+1}-y_n$ と比べよ。各段階で差は何倍に縮むか。

段階 2　置換（substitution）

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう　$t = \frac{1}{2}\left(x - \frac{pq}{x}\right)$ として、$t^2 + pq$ と $t^2 + \frac{1}{4}(p+q)^2$ を計算せよ。これらは因数分解（factorise）できるか。

手を止めて、やってみよう　$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$ も求めよ。x が 0 から ∞ まで動くとき、t はどう動くか。これらを組み合わせ、t についての被積分関数（integrand）が偶関数（even function）であることを用いよ。

段階 3 積分の値を求める

扱う内容：小問 (ii)

> **手を止めて、やってみよう** (x_0, y_0) から始めて、この恒等式（identity）を繰り返し適用せよ。$n \to \infty$ のとき $\mathrm{I}(x_n, y_n)$ はどうなるか。$\mathrm{I}(M, M)$ を直接計算せよ。

背後にある数学

問題が認めるよりも速い

小問 (i) は差が各ステップで少なくとも半分になることを示しており、これはステップごとにおよそ 2 進数 1 桁ずつ精度が上がることを意味する。しかし導入の表は、はるかに劇的なことを示している。正しい桁数が各ステップでおよそ 2 倍になっているのである（$2, 4, 10, 21, 43, \ldots$）。実際、

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\right)^2 = \frac{(x_n - y_n)^2}{2\left(\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n}\right)^2},$$

であるから、各段階の差はおよそ直前の差の 2 乗の定数倍である。これを**二次収束**（quadratic convergence）といい、Section 2.7 できちんと学ぶ。

楕円積分

本問の積分 $\mathrm{I}(p, q)$ は、姿を変えた**完全楕円積分**（complete elliptic integral）である。これは楕円の弧長を計算する際に現れる種類の積分であり、読者の知っている関数を用いて表すことはできない。その最も有名な応用は振り子（pendulum）である。周期を表す A レベル（A level、英国の大学入学資格試験）の公式 $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ は、振れ幅

が小さい場合の近似にすぎない。角度 θ_0 から放した振り子の正確な周期は

$$T = \frac{2\pi\sqrt{L/g}}{M\!\left(1, \cos\frac{\theta_0}{2}\right)},$$

であり、これは算術幾何平均によって値が求まる楕円積分である。$\theta_0 = 90^\circ$ のとき、真の周期は簡単な公式の予測より約 18% 長い。ガウスの日記の記述はレムニスケート、すなわち 8 の字形の曲線に関するものであった。その全弧長には $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ が現れ、この積分は姿を変えた $I(\sqrt{2}, 1)$ に等しいので、算術幾何平均によって値が求まるのである。

π の計算

1976 年、Richard Brent と Eugene Salamin はそれぞれ独立に、ガウスの考えを、正しい桁数が各ステップで 2 倍になる π の計算アルゴリズムへと仕立てた。25 ステップで数千万桁が得られる。この種のアルゴリズムは 1980 年代から 1990 年代にかけて π の記録的な計算に用いられ、現在では高精度が必要なあらゆる場面で、このような二次収束するアルゴリズムが標準となっている。ステップごとに約 0.6 桁しか精度が上がらない Section 2.5 のヴィエト（Viète）の積と比べてみるとよい。

次の一歩

1. **二次収束。** 恒等式 $x_{n+1} - y_{n+1} = \dfrac{(x_n - y_n)^2}{2(\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n})^2}$ を証明し、$x_{n+1} - y_{n+1} \le \dfrac{(x_n - y_n)^2}{8y_0}$ を導け。

2. **手計算。** 電卓を使って $M(2, 1)$ を小数第 6 位まで求めよ。何ステップ必要だったか。

3. **スケーリング。** $\lambda > 0$ に対して $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda M(x, y)$ であること、および $I(\lambda p, \lambda q) = \lambda^{-1} I(p, q)$ であることを示せ。これら 2 つの事実が $I(x_0, y_0) = \pi/(2M)$ と矛盾しないことを確かめよ。

4. **振り子。** 上の公式を用いて、60° から放した振り子の周期が、小振幅での予測よりどれだけ長いかを有効数字 3 桁で求めよ。

さらに学ぶために

- **David Cox,「The arithmetic–geometric mean of Gauss」**, *L'Enseignement Mathématique* 30 (1984)（ガウスの算術幾何平均）。歴史と数学についての古典的な解説である。

最初の数節は微積分の知識だけで読める。

- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM*** (Wiley)（円周率と算術幾何平均）。算術幾何平均と π の高速計算についての決定版といえる本である。
- **Jonathan Borwein & Keith Devlin, *The Computer as Crucible*** (A. K. Peters)（るつぼとしてのコンピュータ）。実験数学を扱い、ガウスの発見のように数値の一致に気づくことから生まれた発見も紹介している。

詳しい解説付きの解答は第 2.6 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/agm.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com