2.5 ヴィエトの無限積

ワークシート

問題

STEP III 2022、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　sinh の倍角公式はどのようなものか。（自信がなければ、$\sinh 2y$ と $\sinh y \cosh y$ を指数関数で表して比べてみよ。）

段階 1 半分にすることを繰り返す

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう $n = 1$ の場合は、$y = \frac{x}{2}$ としたときの倍角の公式（double-angle formula）$\sinh 2y = 2\sinh y \cosh y$ そのものである。

手を止めて、やってみよう 公式が n で成り立つとすると、その最後の因数は $\sinh(x/2^n)$ である。この因数に倍角の公式を適用せよ。後半の結論を導くには、x で割って整理すればよい。

段階 2　極限

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう　$\sinh y$ の級数（series）展開から、$y \to 0$ のとき $\dfrac{\sinh y}{y}$ は何に近づくか。

手を止めて、やってみよう　小問 (i) において、x を固定したまま $n \to \infty$ とせよ。$\dfrac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)}$ はどうなるか。

段階 3　$\ln 2$ を表す公式

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう　$x = \ln 2$ とすると $e^{x/2} = \sqrt{2}$ である。$\cosh \frac{x}{2}$ と $\cosh \frac{x}{4}$ を計算し、簡単にせよ。

手を止めて、やってみよう　$\cosh(x/2^k)$ の一般的な形を見つけよ。因数をすべて掛け合わせると、2 の累乗はまとめて何になるか。また、$\frac{\sinh x}{x}$ も計算せよ。

段階 4　ヴィエト（Viète）の公式

扱う内容：小問 (iv)

考えてみよう　小問 (iv) には π が含まれているので、通常の三角関数から来ているはずである。sinh と cosh をそれぞれ sin と cos に置き換えても、小問 (i) と (ii) はそのまま成り立つだろうか。

手を止めて、やってみよう　$\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{2}{\pi}$ となるように x を選び、最初のいくつかの因数を計算せよ。半角の公式（half-angle formula）$\cos\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$ が役に立つ。

背後にある数学

アルキメデスの多角形

ヴィエトの公式には、アルキメデス（Archimedes）にまでさかのぼる幾何学的な意味がある。半径 1 の円に内接する 2^n 辺の正多角形（regular polygon）の面積は

$A_n = 2^{n-1}\sin\frac{2\pi}{2^n}$ である。辺の数を 2 倍にすると、面積は

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{2^n \sin(\pi/2^n)}{2^{n-1}\cdot 2\sin(\pi/2^n)\cos(\pi/2^n)} = \frac{1}{\cos(\pi/2^n)}.$$

倍になる。正方形（$A_2 = 2$）から出発して限りなく 2 倍を繰り返すと、面積は円の面積 π に近づく。よって $\pi = 2 \div (\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots)$ となり、これがヴィエトの公式である。積の各因数は、図 2.5.1 の連続する二つの多角形の面積の比である。

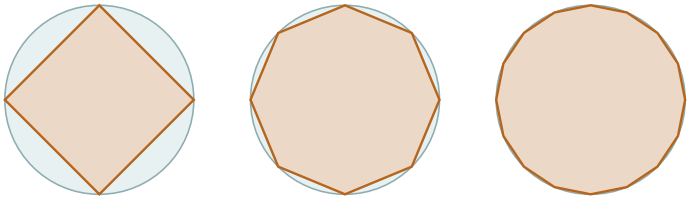

図 2.5.1　半径 1 の円に内接する、辺の数が 4、8、16 の正多角形。辺の数を 2 倍にするたびに、面積はヴィエトの積の因数を一つずつ余分に割ったものになり、面積は π に向かって増加していく。

無限積

ヴィエトの積は、数学における最初の無限積であった。その後にも続くものがあった。ジョン・ウォリス（John Wallis）は 1655 年に $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$ を発見し、オイラー（Euler）による $\frac{\sin x}{x}$ の積表示は Section 2.4 に登場した。大学では、無限積がどのような場合に収束（converge）するかを学ぶ。おおまかに言えば、小さな正の a_n に対する $\prod(1+a_n)$ は $\sum a_n$ と同じように振る舞う。$\ln(1+a_n) \approx a_n$ だからである。ここでは $1-\cos(\pi/2^n) \approx \frac{1}{2}(\pi/2^n)^2$ であり、これは毎回 4 分の 1 ずつ小さくなるので、積は速く収束する。

どれくらい速いか

n 個の因数を掛けた後の部分積はちょうど $\dfrac{1}{2^n\sin(\pi/2^{n+1})}$ に等しく、その誤差はおよそ $\frac{\pi^2}{6\cdot 4^{n+1}}$ の $\frac{2}{\pi}$ 倍である。新しい因数を一つ加えるごとに答えの精度はおよそ 4 倍になり、小数でおよそ 0.6 桁ずつ得られる。因数を 10 個とれば、$2/\pi$ が小数第 6 位まで正しく求まる。これは悪くないが、各段階で正しい桁数を 2 倍にする Section 2.6 の方法の速さにはとても及ばない。

次の一歩

1. **1990 年版。** STEP I 1990、問 8（step.maths.org/questions/90-s1-q8）に取り組んでみよ。この問題は、sin の倍角公式以外は何も使わずに、本節とは別の道筋でヴィエトの積に到達する。どちらの方法がより自然だと感じるだろうか。

2. **別の角度。** $\frac{\sin x}{x}$ の積表示で $x = \frac{\pi}{3}$ として、$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ を無限積で表し、最初の二つの因数を簡単にせよ。

3. **因数はいくつ必要か。** 電卓を用いて、π を小数第 4 位まで正しく求めるにはヴィエトの積の因数がいくつ必要かを調べよ。また、因数を一つ増やすごとにおよそ 0.6 桁ずつ精度が上がる理由を説明せよ。

4. **$\ln 3$ の公式。** $x = \ln 3$ として小問 (iii) を繰り返し、$\frac{1}{\ln 3}$ を無限積で表せ。$\frac{1}{\ln 3}$ を小数第 2 位まで求めるには因数がいくつ必要か。この積がヴィエトの積よりも収束が遅いのはなぜか。

さらに学ぶために

- **Petr Beckmann, *A History of* π**（St Martin's Press）。『π の歴史』。アルキメデス、ヴィエト、ウォリスらの物語が熱のこもった筆致で語られる。
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM***（Wiley）。『π と算術幾何平均』。Section 2.6 の方法を含む、π の計算の本格的な数学。本章を読み終えていれば、第 1 章は十分に読める。
- **Eli Maor, *Trigonometric Delights***（Princeton University Press）。『三角法の楽しみ』。ヴィエトとその積についての章がある。

詳しい解説付きの解答は第 2.5 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/viete.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com