2.4 $\pi^2/6$

ワークシート

問題

STEP III 2018、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/18-s3-q7

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　多項式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ が根 $r_1, \ldots, r_n$ をもつとき、$r_1 + \cdots + r_n$ を係数で表すとどうなるか。

段階 1 ド・モアブル（De Moivre）

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう $\cot\theta + \mathrm{i}$ を、$\sin\theta$ を分母とする 1 つの分数で表せ。分子について何に気づくか？

手を止めて、やってみよう $\cot\theta + \mathrm{i}$ と $\cot\theta - \mathrm{i}$ をそれぞれド・モアブルの定理を用いて $2n+1$ 乗し、差をとれ。

段階 2　多項式（polynomial）

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　次に、$c = \cot\theta$ として、$(c+\mathrm{i})^{2n+1} - (c-\mathrm{i})^{2n+1}$ を二項定理（binomial theorem）を用いて展開せよ。どの項が打ち消し合い、どの項が 2 倍になるか？

手を止めて、やってみよう　$\sin(2n+1)\theta = 0$ かつ $\sin\theta \neq 0$ となるのは、どのような θ のときか？これらの値を用いて、$x = \cot^2\theta$ についての多項式の相異なる n 個の根（roots）を求めよ。なぜそれらが根のすべてであるといえるのか？

段階 3 根の和

扱う内容：小問 (ii)

手を止めて、やってみよう 多項式 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ が根 $r_1, \ldots, r_n$ をもつならば、$r_1 + \cdots + r_n = -a_{n-1}/a_n$ である。小問 (i) から 2 つの係数（coefficients）を読み取れ。

段階 4　はさみうち（squeeze）

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう　$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき $0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$ が成り立つことから出発せよ。逆数（reciprocals）をとって 2 乗せよ。$\frac{1}{\sin^2\theta}$ は $\cot^2\theta$ とどのような関係にあるか？

手を止めて、やってみよう　$\theta = \frac{m\pi}{2n+1}$ とおき、$m = 1, \dots, n$ について和をとれ。外側の 2 つの和は小問 (ii) から得られる。$n \to \infty$ のとき、上下からの評価（bounds）はそれぞれ何に近づくか？

背後にある数学

オイラーの大胆な議論

1734 年のオイラー自身の議論は、現代の基準では厳密ではなかったが、目を見張るものであった。根 $\pm a, \pm b, \pm c, \dots$ をもち、0 における値が 1 である多項式は、$(1 - x^2/a^2)(1 - x^2/b^2)\cdots$ と因数分解される。関数 $\frac{\sin x}{x}$ は 0 における値が 1 で、根

$\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ をもつ。そこでオイラーは、これを「無限次の多項式」とみなして

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots.$$

と書いた。右辺の x^2 の係数は $-\frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots\right)$ であり、一方マクローリン級数（Maclaurin series）$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \cdots$ からは $-\frac{1}{6}$ である。両者を比べると $\pi^2/6$ が得られる。私たちの STEP の証明は、同じ考え方の有限で厳密な版である。すなわち、根が π の倍数と結びついた多項式と、その 2 番目の係数である。

平方の逆数を越えて

オイラーはさらに $\sum 1/m^4 = \pi^4/90$、$\sum 1/m^6 = \pi^6/945$ を見いだし、一般に $\sum 1/m^{2k}$ は π^{2k} の有理数倍であって、**ベルヌーイ数**（Bernoulli numbers）が関わることを示した。奇数乗の場合は事情がまったく異なる。Section 2.3 で見たように、$\sum 1/m^3$ の公式は誰も知らない。これらの和はリーマンゼータ関数（Riemann zeta function）の値 $\zeta(2), \zeta(4), \ldots$ であり、この関数の複素数の引数に対するふるまいが素数の分布を支配している（Section 1.2）。

再び出会う場所

大学では、$\zeta(2) = \pi^2/6$ の証明に少なくともあと三つ出会うだろう。**フーリエ級数**（Fourier series）（関数を正弦と余弦の和として表すもの）による証明、二重積分（double integral）による証明、そして複素解析（complex analysis）による証明である。また、この数は確率にも現れる。無作為に選んだ二つの整数が公約数をもたない（互いに素である）確率は $6/\pi^2 \approx 0.61$ である。（素数 p が両方を割り切る確率は $1/p^2$ であるから、どの素数も両方を割り切らない確率は $\prod_p (1 - 1/p^2)$ であり、オイラーはこの積が $1/\zeta(2)$ に等しいことを示した。）確率の極限に π が現れる別の例は、Section 12.23 の主題である。

次の一歩

1. **1992 年版。** STEP III 1992、問 8（step.maths.org/questions/92-s3-q8）に挑戦せよ。この節のものと似た多項式を用いて、正接の 2 乗の和や余割の 2 乗の和を正確に求める問題である。（**ヒント**：根が r_i である多項式がわかっているとき、根が $1/r_i$ である多項式は何か。）

2. **奇数の平方。** $\sum 1/m^2 = \pi^2/6$ から $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$ を導け。

3 **4 乗。** やや難 $\sum r_i^2 = (\sum r_i)^2 - 2\sum_{i<j} r_i r_j$ と多項式の係数を用いて $\sum_{m=1}^{n} \cot^4\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)$ を求め、はさみうちの議論を応用して $\sum 1/m^4 = \pi^4/90$ を証明せよ。

4 **どれくらい速いか。** 小問 (iii) の下からの評価を用いて、$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{4n}$ を示せ。部分和が $\pi^2/6$ との差 0.001 以内に入るには、この評価によればどれだけ大きな n をとれば十分か。実際の誤差は $1/n$ に近いが、それと比較せよ。

さらに学ぶために

- **William Dunham, *Euler: The Master of Us All*** (Mathematical Association of America)。『オイラー：われら皆の師』。第 3 章では、バーゼル問題の物語が数学的内容も含めて余すところなく語られている。
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***、第 9 章「Three times $\pi^2/6$」（$\pi^2/6$ を三通りで）。この節の証明も収められている。
- **Paul Nahin, *Dr. Euler's Fabulous Formula*** (Princeton University Press)。『オイラー博士の素敵な数式』。複素数、フーリエ級数、そしてこのような和を扱っている。

詳しい解説付きの解答は第 2.4 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/basel.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com