2.3 発散する級数と、収束するその親戚

ワークシート

問題

STEP III 2014、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s3-q8

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　最初の不等式は、$r = k^n$ から $r = k^{n+1} - 1$ までの項からなるブロックについてのものである。$k = 2$、$n = 3$ のとき、それはどの項で、何個あるか。

段階 1 ブロックを評価する

扱う内容：最初の不等式

考えてみよう $k = 2, n = 3$ のとき、$r = k^n$ から $r = k^{n+1} - 1$ までのブロック（block）はどの項からなり、項は何個あるか。一般に、ブロックには何個の項があるか。

手を止めて、やってみよう f は減少関数（decreasing function）である。ブロック内での $f(r)$ の最小値と最大値はそれぞれ何か。それぞれに項の個数を掛けよ。

段階 2　調和級数

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　$k=2$, $f(r)=\frac{1}{r}$ として、2^n から $2^{n+1}-1$ までのブロックに対する二つの評価を求めよ。

手を止めて、やってみよう　どのブロックも、少なくとも同じ一定の量を寄与する。$n=0,1,\dots,N$ のブロックを足し合わせよ。$N\to\infty$ のとき、部分和（partial sum）はどうなるか。

段階 3 逆数の 3 乗の和

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう 今度は $k = 2$ のまま $f(r) = \frac{1}{r^3}$ とする。ブロック n に対する上からの評価（upper bound）は何か。

手を止めて、やってみよう $n = 0, 1, 2, \ldots$ のブロックは、すべての正の整数をちょうど一度ずつ覆う。上からの評価を足し合わせよ。それは等比級数（geometric series）になる。

段階 4　2 を含まない数を数える

扱う内容：小問 (iii)

手を止めて、やってみよう　0 から 999 までのすべての数を、先頭に 0 を補って 3 桁で書け（たとえば 7 は 007 とする）。2 を使えないとき、各桁の選び方は何通りあるか。最後に 0 を除くことを忘れないように。

段階 5 Kempner の級数

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう 桁数によって定まるブロックを使え。これは $k = 10$ とすることに相当する。

手を止めて、やってみよう 2 を含まない d 桁の数はいくつあるか（最高位の桁は 0 にはできない）。d 桁の数として最小のものは何か。各ブロックの寄与を評価し、d について足し合わせよ。

背後にある数学

凝縮判定法

この問題の最初の不等式は、**コーシー（*Cauchy*）の凝縮判定法**（condensation test）の核心である。f が正で減少関数ならば、

$$\sum_{r=1}^{\infty} f(r) \text{ が収束する} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n f(2^n) \text{ が収束する。}$$

この判定法は、難しい級数を易しい級数に変えてくれる。$f(r) = 1/r^p$ に適用すると

$\sum 2^n \cdot 2^{-np} = \sum (2^{1-p})^n$ となり、これは $p > 1$ のときに限り収束する等比級数である。$1/(r \ln r)$ に適用すればこれさえも発散することがわかり、$1/(r(\ln r)^2)$ に適用すればこちらは収束することがわかる。この議論はニコル・オレーム（Nicole Oresme）にさかのぼる。オレームは 1350 年ごろ、まさに図 2.3.1（オンライン版の節全体を参照）のブロックを用いて調和級数の発散を証明した。

調和級数はどれほどゆっくり発散するか

図 2.3.1（オンライン版の節全体を参照）からは、各ブロックがおよそ $\ln 2$ ずつ寄与することがうかがえる。したがって、最初の N 項の和はおよそ $\log_2 N \times \ln 2 = \ln N$ になるはずである。実際、

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} = \ln N + \gamma + (0 \text{ に収束する項})$$

が成り立つ。ここで $\gamma = 0.5772\ldots$ はオイラー・マスケローニ定数（Euler–Mascheroni constant）である。γ が有理数（rational number）かどうかは誰にもわかっていない。この公式は大学 1 年次の解析学で積分を用いて証明することになる。また、調和数は Section 9.11 と Section 11.12 にも再び登場する。

ほとんどの数は 2 を含む

なぜ Kempner の級数は収束するのだろうか。それは、大きな数の中では「2 を含まない数」が非常にまれだからである。10^d 未満の数のうち 2 を含まないものの割合は高々 $(0.9)^d$ であり、これは 0 に収束する。100 桁の数のうち、数字 2 を含まないものは 0.003% にも満たない。つまり、取り除いているのは項の 1 割ではなく、ほとんどすべてなのである。80 という評価はかなり甘い。1979 年、Robert Baillie は加速法を用いてこの和を小数点以下何桁にもわたって計算し、その値はおよそ 19.257 であることを示した。

累乗の逆数の和

小問 (ii) の和は $\zeta(3)$ であり、これは Section 1.2 で出会ったリーマン（Riemann）ゼータ関数（zeta function）の値である。Section 2.4 では $\zeta(2) = \pi^2/6$ を正確に求めることになるし、オイラー（Euler）は $\zeta(4), \zeta(6), \ldots$ の公式を見つけた。しかし、$\zeta(3)$ の公式は誰にも見つかっていない。1978 年、Roger Apéry は Section 2.9 のものとよく似た積分を用いて $\zeta(3)$ が無理数（irrational number）であることを証明し、数学界を驚かせた。$\zeta(5)$ が無理数かどうかは今なおわかっていない。

次の一歩

1 **遅さを実感する。** $\sum_{r \le N} 1/r \approx \ln N + 0.5772$ を用いて、調和級数が 10 を超えるのに何項必要か、また 100 を超えるのに何項必要かを見積もれ。

2 **判定法を使ってみる。** 小問 (i) の方法を $f(r) = 1/r^2$ に用いて、$\sum 1/r^2 \le 2$ を示せ。さらに、第 1 項を別に扱うことで評価を改善せよ。

3 **収束と発散の境目。** $k = 2$ のブロック不等式を用いて、$\sum_{r \ge 2} \dfrac{1}{r \ln r}$ が発散し、$\sum_{r \ge 2} \dfrac{1}{r (\ln r)^2}$ が収束することを示せ。

4 **さらに除外する。** やや難 10 進法で表したときに 2 も 7 も含まない正の整数の逆数の和は 35 未満であることを示せ。（35 がどこから来るかわかるだろうか。）

さらに学ぶために

- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant***（Princeton University Press）。『ガンマ：オイラーの定数を探る』。調和級数、γ をはじめ多くの話題を、力のある高校生向けに書いた本である。
- **Mary Hart, *Guide to Analysis***（Palgrave）。『解析学ガイド』。級数と比較判定法についてのわかりやすい章を含む、簡潔な大学 1 年次向けの教科書である。
- **Robert Baillie,「Sums of reciprocals of integers missing a given digit」**, *American Mathematical Monthly* 86 (1979)。「特定の数字を含まない整数の逆数の和」。この節を読み終えた後なら読める短い論文である。

詳しい解説付きの解答は第 2.3 節にある：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/kempner.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com