2.2 極限としての黄金比

ワークシート

問題

STEP II 2013、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s2-q6

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　分子と分母に見覚えはないだろうか。また、小数で見てみよう：$1, 2, 1.5, 1.667, 1.6, 1.625, 1.615, \ldots$。この数列は増加しているだろうか。減少しているだろうか。

段階 1　2 つ離れた項を比べる

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　$(*)$ を用いて $u_{n+2}-u_n$ を $\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_{n-1}}$ と表し、通分（common denominator）せよ。

手を止めて、やってみよう　$u_{n+1}-u_{n-1}$ についても同じことを行い、2 つを組み合わせよ。そのうえで $(*)$ を用いて、分母に現れる積 $u_{n+1}u_n$ と $u_{n-1}u_{n-2}$ を簡単にせよ。

段階 2　落とし穴

扱う内容：小問 (ii)

手を止めて、やってみよう　小問 (i) を使う前に、すべての n について $1 \le u_n \le 2$ が成り立つことを数学的帰納法（induction）で証明せよ。$1 \le u_n \le 2$ のとき、$\dfrac{1}{u_n}$ はどれくらい大きくなりうるか。

段階 3　2 つの単調な部分列

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう　小問 (i) によれば、$u_{n+2} - u_n$ は $u_n - u_{n-2}$ の正の定数倍である。では、$u_3 - u_1$、$u_5 - u_3$、$u_7 - u_5, \ldots$ の符号について何がいえるか。

考えてみよう　奇数番目の項は増加するか、それとも減少するか。偶数番目の項はどうか。それらは有界（bounded）か。

手を止めて、やってみよう　与えられた定理は増加数列（increasing sequence）についてのものである。下に有界（bounded below）な減少数列（decreasing sequence）に、この定理をどのように適用できるか。

段階 4　極限を求める

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう　$(*)$ を 2 回用いて、u_{n+2} を u_n で直接表せ。

手を止めて、やってみよう　n を奇数に限って $n \to \infty$ とし、次に偶数に限って同様にせよ。どちらの極限（limit）も同じ 2 次方程式（quadratic）を満たす。それはどちらの解か。そのとき、なぜ数列全体が収束（converge）するのか。

段階 5 別の初項から始める

扱う内容：最後の小問（$u_1 = 3$ から始める場合）

考えてみよう $u_1 = 3$ として、最初のいくつかの項を書き出せ。これまでの議論のうちどれが依然として成り立つか。また、それは何番目の項以降についてか。

背後にある数学

蜘蛛の巣図と不動点

$u_{n+1} = f(u_n)$ で定まる数列はどれも、**蜘蛛の巣図**（cobweb diagram）として描くことができる（図 2.2.1）。$y = f(x)$ と $y = x$ のグラフをかく。x 軸上の u_1 から出発し、曲線まで垂直に進み（高さ $u_2 = f(u_1)$）、次に直線 $y = x$ まで水平に進み（これで $x = u_2$ に移る）、再び曲線まで垂直に進む、ということを繰り返す。ここで $f(x) = 1 + 1/x$ は減少関数であり、そのために経路は、行き過ぎと不足を交互に繰り返しながら、曲線と直線の交点、すなわち $f(\varphi) = \varphi$ となる**不動点**（fixed point）φ に向かって渦を巻くように内側へ進んでいく。

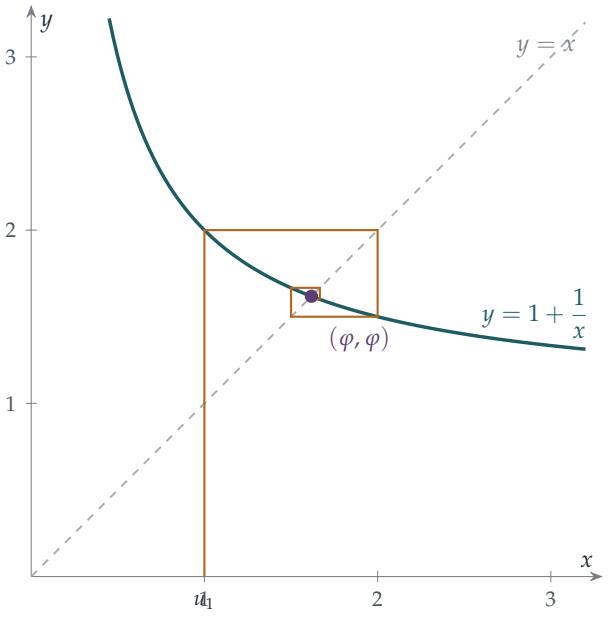

図 2.2.1　$u_1 = 1$ から始めた $u_{n+1} = 1 + 1/u_n$ の蜘蛛の巣図。経路は曲線まで上がり、直線 $y = x$ まで横に進むことを何度も繰り返す。曲線が右下がりであるため、経路は両側を交互に行き来しながら、不動点 $\varphi \approx 1.618$ に向かって渦を巻くように近づく。これが奇数番目と偶数番目の項のジグザグである。

どれだけ速く、そしてなぜ

小問 (i) の因子 $(1 + u_n)(1 + u_{n-2})$ はどこから来るのだろうか。不動点の近くでは $u_{n+1} - \varphi = f(u_n) - f(\varphi) \approx f'(\varphi)(u_n - \varphi)$ であり、$f'(\varphi) = -1/\varphi^2 \approx -0.38$ である。したがって、1 ステップごとに誤差はおよそ -0.38 倍される。符号が反転し（ジグザグ）、大きさが縮む（収束）のである。2 ステップでは誤差は $1/\varphi^4 \approx 0.146$ 倍され、これはまさに $1/\big((1 + u_n)(1 + u_{n-2})\big)$ の極限である。大学ではこれが**縮小写像定理**（contraction mapping theorem）になる。不動点の近くで $|f'| \le k < 1$ ならば、反復はその不動点に収束し、誤差は少なくとも等比数列的に縮小する。これは数学で最も有用な定理の一つであり、微分方程式に解が存在することを証明するのにも使われる（第 8 章）。Section 2.8 では、不動点が引きつける性質を**もたない**写像に出会い、まったく異なる結果を見ることになる。

最も無理な数

項 $u_n = F_{n+1}/F_n$ は、その大きさの分数としては φ の最良の近似である。しかし「最良」といっても、あまりよい近似ではない。φ は、他のどの数よりも分数で近似しにくいのである。その理由は連分数（continued fraction）表示 $[1; 1, 1, 1, \ldots]$ に表れている。

連分数に大きな数が現れると非常によい近似が得られる（$\pi = [3;7,15,1,292,\ldots]$ と、優れた近似 $\frac{355}{113}$ を思い出そう）が、φ はどこまでも可能な限り小さな数しか現れない。フルヴィッツ（Adolf Hurwitz）は 1891 年に、すべての無理数（irrational number）x に対して $|x - p/q| < 1/(\sqrt{5}\,q^2)$ を満たす分数が無限に多く存在すること、そして $\sqrt{5}$ はこれ以上改良できないことを証明した。改良できないのは、まさに φ があるためである。この「最大の無理性」こそが、ヒマワリの種の螺旋模様に黄金角が現れる理由である。

次の一歩

1 **内に潜むフィボナッチ数列。** $F_1 = F_2 = 1$、$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ とするとき、$u_n = F_{n+1}/F_n$ であることを証明せよ。

2 **誤差は縮む。** $u_{n+1} - \varphi = -\dfrac{u_n - \varphi}{\varphi\, u_n}$ を示し、すべての n について $|u_n - \varphi| \le \varphi^{-(n-1)}$ であることを導け。（$\varphi^2 = \varphi + 1$ および $u_n \ge 1$ を用いよ。）

3 **数列を途切れさせる。** $u_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ならば数列は定数であることを示せ。また、ある $u_n = 0$ となって数列が続けられなくなるような初項 u_1 の値をすべて求めよ。（ヒント：$u_n = 0$ から逆にたどれ。）

4 **$\sqrt{2}$ の親戚。** $v_1 = 1$、$v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1 + v_n}$ とする。この問題の方法を応用して $v_n \to \sqrt{2}$ を示し、$\sqrt{2}$ を連分数で表せ。

さらに学ぶために

- **Mario Livio, *The Golden Ratio*** (Broadway)。φ の歴史を、本物の数学と数多くの俗説とを区別しながら描いている。
- **C. D. Olds, *Continued Fractions*** (Mathematical Association of America)。優秀な高校生向けに書かれた、短くて非常に読みやすい入門書。
- **J. C. Burkill, *A First Course in Mathematical Analysis*** (Cambridge University Press)。単調数列と完備性を厳密に扱っており、演習問題も豊富である。

詳しい解説付きの解答は第 2.2 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/golden-limit.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com