2.1 「いずれは」とは何を意味するか

ワークシート

問題

STEP III 2015、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/15-s3-q2

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　定義には「ある正の整数 m が存在して」という語句が含まれている。$(s_n) \le (t_n)$ を証明するには、正確には何を示せばよいか。それが**偽**であることを証明するには、何を示さなければならないか。

段階 1　一次関数（linear function）と二次関数（quadratic function）の比較

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　最初のいくつかの項は問題にならない。$1000n \le n^2$ となるのはどのような n か。両辺を正の数 n で割ってみよ。

段階 2 「最終的に小さい」（eventually smaller）は通常の「小さい」と同じように振る舞うか

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう 「$(s_n) \leq (t_n)$ **ではない**」という主張を、先頭に「ではない」を付けない形で完全に書き下してみよ。$s_n > t_n$ はどのくらいの頻度で起こらなければならないか。

手を止めて、やってみよう 互いの大小が永遠に入れ替わり続け、どちらも他方より最終的に小さいとはならないような、正の数からなる二つの数列（sequence）を探してみよ。

段階 3　連鎖させる

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう　それぞれの仮定（hypothesis）には固有の m が付随しており、それらは異なるかもしれない。それらを m_1、m_2 とおく。

手を止めて、やってみよう　どのような一つの m の値をとれば、すべての $n \geq m$ に対して両方の不等式が成り立つか。

段階 4 二次関数と指数関数（exponential function）の比較

扱う内容：小問 (iv)

考えてみよう $n = 1, \dots, 8$ に対して n^2 と 2^n の表を作れ。$n^2 \le 2^n$ はどこから成り立つように見えるか。

手を止めて、やってみよう 数学的帰納法（induction）で証明せよ。$n^2 \le 2^n$ から $(n+1)^2 \le 2 \cdot 2^n$ を導くには、$(n+1)^2 \le 2n^2$ がわかれば十分である。それはどのような n に対して成り立つか。

背後にある数学

解析学の言葉

ニュートン（Newton）とライプニッツ（Leibniz）以後のおよそ 150 年間、数学者たちは極限（limit）や無限小（infinitesimal）を見事に使いこなしたが、それが正確に何を意味するのかを述べることはできなかった。1734 年、バークリー（Berkeley）司教は無限小を「消え去った量の亡霊」と嘲笑したが、彼の指摘にも一理あった。その修復は 19 世紀に行われた。コーシー（Augustin-Louis Cauchy）、続いてワイエルシ

ュトラス（Karl Weierstrass）が、「限りなく近づく」という曖昧な言い方を、「任意の」と「存在する」から組み立てられた命題に置き換えたのである。現代の定義

$$a_n \to L \iff \text{任意の}\varepsilon > 0 \text{に対してある}N \text{が存在して、} |a_n - L| < \varepsilon \text{がすべての次で成立：} n \geq N$$

は、先頭に量化子が一つ多いことを除けば、この問題の定義とまったく同じ形をしている。これは大学の解析学の講義で最初に出会うものである。

増大度

小問 (iv) は、有名な階段の小さな一段である。任意の固定された $k > 0$ と $c > 1$ に対して

$$(\ln n) \leq (n^k), \qquad (n^k) \leq (c^n), \qquad (c^n) \leq (n!), \qquad (n!) \leq (n^n),$$

が成り立ち、実はそれぞれの数列は次の数列より最終的に小さいだけでなく、次の数列の**任意の定数倍**よりも最終的に小さい。ハーディ（G. H. Hardy）はこの種の比較について、*Orders of Infinity*（『無限の位数』、1910 年）という一冊の本を書いた。今日ではこれは計算機科学の日常的な言葉であり、「このアルゴリズムは $O(n^2)$ ステップかかる」とは、ステップ数が最終的に n^2 の定数倍以下になるという意味である。n^2 と 2^n の違いは、終了するプログラムと、太陽が燃え尽きるまでに終了しないプログラムとの違いである。

全順序でない順序

小問 (ii) は、「最終的に小さい」が**全順序**（total order）ではないことを示している。すなわち、まったく比較できない数列の組が存在する。このような、推移的ではあるがすべてを比較するわけではない関係は**前順序**（preorder）や**半順序**（partial order）と呼ばれ、いたるところに現れる。整数の整除関係、集合の包含関係、「部分群である」という関係はいずれもその例である。ある関係がどの性質をもち、どの性質をもたないかを見分けることは、数学者としての訓練の一部である。

次の一歩

---

1. **見本問題で準備運動。** 1987 年の最初の STEP の前に公表された問題である STEP III Specimen paper、問 2（step.maths.org/questions/spec-s3-q2）に挑戦せよ。（**最後の部分のヒント：**二項展開（binomial expansion）の次の項を使え。）

2. **両方向。** $(s_n) \leq (t_n)$ かつ $(t_n) \leq (s_n)$ ならば、十分大きいすべての n について $s_n = t_n$ であることを証明せよ。

3 **無限大への競走。**正の数からなる二つの**増加**（increasing）数列で、どちらも無限大に発散し、どちらも他方より最終的に小さくはならないものを見つけよ。

4 **階段を上る。**具体的な m を挙げて $(2^n) \leq (n!)$ を示せ。次に $(n^{10}) \leq (2^n)$ を示し、条件を満たす最小の m を求めよ。（二つ目の部分では表計算ソフトが役に立つ。答えは驚くほど大きい。）

さらに学ぶために

- **Lara Alcock, *How to Study for a Mathematics Degree***（Oxford University Press）。『数学の学位を取るための学び方』。第 3 章は、まさにこの種の論理的な言葉と、それが新入生にとってなぜ難しいのかを扱っている。
- **Lara Alcock, *How to Think About Analysis***（Oxford University Press）。『解析学の考え方』。大学一年次の解析学の定義への親しみやすい案内書である。
- **Daniel Velleman, *How to Prove It***（Cambridge University Press）。『証明の方法』。論理、量化子、証明への体系的な入門書である。

詳しい解説付きの解答は第 2.1 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/eventually.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com