12.8 ペニーのゲーム

ワークシート

問題

STEP III 2001、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/01-s3-q13

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

> **考えてみよう**　ここまでの投げの結果が TT で終わっていて、まだどちらも勝っていないとする。TTH より先に THH が現れることはありうるか。

段階 1　状態

扱う内容：小問 (i)

> **考えてみよう**　いったん TT が現れたら、THH が TTH より先に現れることはあり得るだろうか。そのうえで、直前の 2 回の投げが XY であるときに A が勝つ確率（probability）を p_{XY} とおく。4 つの状態（state）それぞれについて方程式を立てよ。

段階 2 解く

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう 4 つの方程式を解け。最初の 2 回の組はそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で現れる。

段階 3 B 対 C

扱う内容：小問 (ii)

手を止めて、やってみよう C は HHT を、B は THH を待っている。ゲームが HH で始まったら、どちらが勝つか。そうでない場合は、最初の HH の直前に何が来るかを考えよ。

段階 4　循環

扱う内容：小問 (iii)

> **考えてみよう**　C 対 D については、小問 (i) と同様に状態を設定せよ。D 対 A については、小問 (ii) で表と裏を入れ替えよ。

背後にある数学

なぜ有利な列があるのか

3 回分の列はどれも、どの位置においても等しい確率で現れ、それぞれの期待（expected）待ち時間（waiting time）は容易に計算できる。しかし待ち時間は列によって異なる。TTH は平均 8 回で現れるが、TTT は平均 14 回かかる。自分自身と重なりをもつ列（TTT のように、惜しくも TTH となると 2 回分の進捗が無駄になるもの）は現れるのが遅いのである。そして 2 つの列の競争で重要なのは、それぞれが**相手の列**とどう重なるかである。THH が HHT に勝つのは、HHT のどの出現も（一番最初を除けば）直前に T があり、つまりその時点で THH がちょうど現れているからである。後から選ぶ者の秘訣は常に同じである。相手の列の最初の 2 つの記号をとり、その前に相手の列の真ん中の記号の反対を置けばよい。

コンウェイの公式

ジョン・コンウェイ（John Conway）は、この勝率について驚くべき公式を発見した。長さ n の 2 つの列 X, Y に対して、**相関**（correlation）XY を n 桁の 2 進数として次のように定める。左から読んで第 i 桁は、X の第 i 記号から始まる部分が、それと同じ長さの Y の先頭部分に一致すれば 1 とする。このとき、X より先に Y が現れる勝率の比は

$$(XX - XY) : (YY - YX).$$

である。$X = \text{HHT}, Y = \text{THH}$ の場合、$XX = 100_2 = 4$（HHT 全体だけが自分自身と一致する）、$XY = 001_2 = 1$（HHT の最後の T だけが THH の先頭と一致する）、

$YY = 100_2 = 4$、$YX = 011_2 = 3$（THH の末尾の HH と H がともに HHT の先頭と一致する）である。よって THH が先に現れる勝率の比は $(4-1):(4-3) = 3:1$ であり、これはステージ 3 の $\frac{3}{4}$ である。コンウェイの公式は任意の長さ、任意の文字集合の列に対して成り立ち、その証明には**マルチンゲール**（martingale）の理論が用いられる。列が現れることに賭けるギャンブラーたちがいるカジノを想像し、公平なゲームの期待利益は 0 であるという事実を使うのである。

Penney とガードナー

Walter Penney は 1969 年、*Journal of Recreational Mathematics* 誌の短い記事でこのゲームを紹介した。マーティン・ガードナー（Martin Gardner）は 1974 年、*Scientific American* 誌の連載コラムでこれを有名にし、そこにはコンウェイが発見したものの発表していなかったコンウェイの公式も含まれていた。この種の非推移的な関係（エフロン（Efron）のサイコロもその一例で、サイコロ A が B に勝ち、B が C に勝ち、C が D に勝ち、D が A に勝つ）は繰り返し驚きを生む源であり、多数派の選好が循環しうる投票理論においても重要である。これがコンドルセ（Condorcet）のパラドックス（Condorcet's paradox）である。

次の一歩

1. **4 人同時に。** STEP II 2015、問 12（step.maths.org/questions/15-s2-q12）に挑戦せよ。4 人が同時に行う Penney のゲームである。

2. **待ち時間。** HH が初めて現れるまでの投げの回数の期待値は 6、HT の場合は 4 であることを示せ。（第一ステップ解析を用いよ。）

3. **最善の応手。** 長さ 3 の 8 つの列それぞれについて、それに最大の確率で勝つ列を求めよ。最も簡単に負かされる列はどれか。

4. **コンウェイの公式。** コンウェイの公式を用いて、HHT が確率 $\frac{2}{3}$ で HTT に勝つことを確かめよ。

さらに学ぶために

- **Martin Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments***（W. H. Freeman）。Penney のゲームとコンウェイの公式を収録している。
- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics***（Addison-Wesley）、8.4 節。母関数（generating function）を用いた Penney のゲームの扱

い。

- **David Williams, *Probability with Martingales***（Cambridge University Press）。マルチンゲールによる証明。将来のために。

詳しい解説付きの解答は第 12.8 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/penney.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com