12.7 勝ち抜き戦で誰と誰が当たるか

ワークシート

問題

STEP II Specimen paper、問 16

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/spec-s2-q16

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　2^n 人の選手によるノックアウト方式のトーナメント（knockout tournament）では、何試合が行われるか。（各試合でちょうど 1 人の選手が敗退する。）

段階 1　第 1 回戦

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　第 1 回戦では、1 人目の選手の対戦相手は、他の選手のうちどの 1 人である確率も等しい。他の選手は何人いるか？

段階 2 鍵となる対称性

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう 組み合わせの抽選はすべて無作為（random）であり、どの試合も公平な硬貨投げで決まる。この過程は、ある 2 人の選手の組を他の組と異なるように扱うだろうか？　では、ある特定の 1 試合について、それが注目している 2 人の選手どうしの対戦である確率（probability）はいくらか？

段階 3 決勝戦

扱う内容：小問 (ii)

手を止めて、やってみよう 決勝戦は 1 試合なので、第 2 段階の考え方を使う。第 r 回戦には 2^{n-r} 試合があり、2 人の選手が 1 つの回戦で対戦するのは高々 1 回である。では、2 人が第 r 回戦で対戦する確率はいくらか？

段階 4　いずれかの段階で

扱う内容：小問 (iii)

> **考えてみよう**　2 人が対戦するのは高々 1 回なので、事象「第 r 回戦で対戦する」は互いに排反（mutually exclusive）である。これらを足し合わせるか、あるいは $2^n - 1$ 試合すべてを一度に数えよ。

背後にある数学

個数の期待値

段階 4 の議論は、実は期待値（expectation）の計算である。X と Y が対戦する回数は、試合ごとに 1 つずつの指示変数（indicator）の和であり、その期待値（値は 0 か 1 なので、対戦する確率に等しい）は、各指示変数の期待値の和に等しい。これが期待値の線形性（linearity of expectation）であり、Section 9.11 や Section 12.4 でも用いた。この方法の大きな利点は、ラウンド間の複雑な従属関係をすべて無視できることである。

シード付きのトーナメント

現実のトーナメントは**シード**（seeded）制である。最も強い選手たちは、終盤のラウンドまで対戦しないように配置される。また、現実の試合は 50–50 ではない。どちらも対称性を壊すので、特定の 2 人が対戦する確率を求めるのは本格的な計算になる。スポーツをモデル化する統計学者は、各試合の確率を選手のレーティングから推定したうえで、まさにこうした計算を用いてトーナメントの結果を予測する。対称な場合は、現実の効果を測るための基準となるのである。

次の一歩

1 **ラウンドごとに。** X と Y がラウンド k で対戦する確率が $\dfrac{2^{n-k}}{\binom{2^n}{2}}$ であることを直接示し、これらを足すと $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ になることを確かめよ。

2 **固定された組み合わせ表。** 代わりに、組み合わせ表が（図のように）あらかじめ固定されていて、すべての選手がそこに無作為に配置されるとする。答えは変わるか。

3 **強い選手。** 選手 X がすべての試合に勝つとする。このとき、X が Y と対戦する確率はいくらか。

4 **リーグ戦。** $2n$ チームによるリーグ戦（league）で、どの 2 チームも 1 回ずつ対戦するとき、試合数はいくらか。これに対応する「対戦する確率」は何か。

さらに学ぶために

- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability***（Dover）。トーナメントの問題も収められている。
- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics***（Pelican）。モデル化と予測について。
- **Joseph Blitzstein & Jessica Hwang, *Introduction to Probability***（CRC Press、オンラインで無料公開）。指示変数と対称性について。

詳しい解説付きの解答は第 12.7 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/knockout.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com