12.6 もう 1 枚の硬貨

ワークシート

問題

STEP I 2016、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/16-s1-q12

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

> ? **考えてみよう**　アリスが 2 回投げるとき、表の回数の分布（distribution）はどうなるか。ボブが 3 回投げるときはどうか。

段階 1　力ずくの計算（brute force）

扱う内容：小問 (i) と (ii)

> ? **考えてみよう**　アリスとボブそれぞれの表の出る回数の分布（distribution）を書き出せ。アリスの表の回数で場合分けして、足し合わせよ。

段階 2 ボブの試行を分ける

扱う内容：小問 (iii)

手を止めて、やってみよう ボブの $n+1$ 回の硬貨投げを、n 回の硬貨投げとそれに続く追加の 1 回とみなせ。互いに n 回ずつ投げた時点で、ボブはアリスより多いか、同じか、少ないかのいずれかである。それぞれの場合に、追加の 1 回は何をもたらすか。アリスとボブの間の対称性（symmetry）を用いよ。

背後にある数学

対称性と余事象

この鮮やかな証明は二つの事実を組み合わせている。対称性によって入れ替わる二つの事象は確率が等しいこと、そして互いに余事象である二つの事象は確率の和が 1 になることである。両方が成り立てば、それぞれの確率は $\frac{1}{2}$ である。同じ論法は確率論のいたるところに現れる。飛行機の座席の問題（Section 12.5）では、S_1 と S_n が対称性によって入れ替わり、最後にはそのちょうど一方が残るのであった。ヘックス（Hex）というゲームでは、盤面の対称性と、必ずどちらか一方のプレイヤーが勝つという事実から、先手が有利であることが示される。ただし、大きな盤面での必勝法は誰も知らない。

引き分けはどのくらい起こりやすいか

投げる回数が等しい場合には、引き分けの確率 p_1 が重要になる。アリスとボブが引き分けるのはアリスの表の回数とボブの表の回数が等しいときであり、これは（対称性によりボブの表の回数を裏の回数に置き換えると）アリスの表の回数とボブの表の回数の和が n になる確率、すなわち $2n$ 回の試行で表が合計 n 回出る確率に等しい。よ

って、スターリングの近似（Stirling's approximation）（Section 12.23）を用いると

$$p_1 = \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

となる。引き分けはまれになっていくが、その減り方はゆっくりである。互いに 100 回ずつ投げても、引き分けの確率はまだ約 5.6% ある。

次の一歩

1. **コインが 2 枚多い場合。** ボブが $n+2$ 枚、アリスが n 枚のコインを投げるとき、$\mathrm{P}(\text{ボブの表が多い}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{P}(H' = H_A)$ を証明せよ。ただし H' はボブの最初の $n+1$ 回の試行における表の回数である。

2. **偏りのあるコイン。** 二人とも表の出る確率が p のコインを使うとき、1 回多く投げる場合の答えはやはり $\frac{1}{2}$ だろうか。鮮やかな証明のどの段階が成り立たなくなるか。

3. **引き分け。** 本文の工夫を用いて $p_1 = \binom{2n}{n}/4^n$ を示し、$n = 1, 2, 3$ に対してその値を求めよ。

4. **サイコロ。** アリスが n 個、ボブが $n+1$ 個のサイコロを振る。ボブの 6 の目の個数が多くなる確率は $\frac{1}{2}$ に等しいだろうか。

さらに学ぶために

- **Peter Winkler, *Mathematical Mind-Benders***（A K Peters）。対称性を用いた解法をもつ確率のパズルが多数収められている。
- **Gabor Székely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics***（Reidel）。確率論と数理統計学におけるパラドックス集。
- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability***（Dover）。確率の難問 50 題。

詳しい解説付きの解答は第 12.6 節にある：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/one-more-coin.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com