12.5 最後の乗客の座席

ワークシート

問題

STEP II 2021、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

> **手を止めて、やってみよう**　起こりうる場合を列挙して、P_2 と P_3 を求めよ。

段階 1 漸化式

扱う内容：小問 (ii)

手を止めて、やってみよう T_1 が $2 \le k \le n-1$ を満たす座席 S_k に座ったとする。このとき $T_2, \ldots, T_{k-1}$ はどうするか。T_k が到着したとき、空いている座席はどれか。なぜこれは座席の数が少ない元の問題と同じになるのか。

考えてみよう 次に、T_1 がどの座席に座るかで条件付け（conditioning）をせよ。それぞれの座席を選ぶ確率（probability）は $\frac{1}{n}$ である。

段階 2　答え

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう　P_2 と P_3 はすでにわかっている。P_n を予想し、求めた漸化式（recurrence）を用いて、累積帰納法（strong induction）によって証明せよ。

段階 3 最後から 2 番目の乗客

扱う内容：小問 (iv)

> **手を止めて、やってみよう** 最後の乗客に残される可能性があるのはどの座席か。T_{n-1} については、自分の座席が S_1 より先に選ばれた場合に限り、その座席を失う。座席を奪われた乗客たちが選ぶ座席の中で、S_1、S_{n-1}、S_n は対等に扱われるだろうか。$n = 2$ という特別な場合を忘れないこと。

背後にある数学

対称性による議論

2 つ目の証明は、確率論における強力な考え方の一例である。すなわち、2 つの結果が確率過程の対称性によって互いに対応しているならば、それらの確率は等しい。ここでの過程は、どちらかが選ばれるまで S_1 と S_n を区別しないので、両者が最後まで残る確率は等しくなければならない。対称性による議論は、長い計算をたった 1 つの観察で置き換えることが多い。この先のいくつかの節にはそうした議論がたくさん登場する。Section 12.6 での 1 回余分な硬貨投げ、Section 12.7 でのトーナメントの組み合わせ抽選などである。

席を奪われる乗客は何人か

席を奪われる乗客（自分の席に座れない乗客）の人数も、扱いやすい振る舞いをする。T_1 は S_1 を選ばない限り席を奪われた状態になり、T_k（$k \geq 2$）が席を奪われる確率は $\frac{1}{n-k+2}$ である。これらを足し合わせると、席を奪われる乗客の人数の期待値（expected value）は

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2}\right) = H_n - \frac{1}{n},$$

となり、およそ $\ln n$ である。乗客が 300 人の飛行機であっても、混乱の影響を受けるのは平均して約 6 人にすぎない。ここでもまた調和数（harmonic numbers）が現れる

(Section 9.11)。

次の一歩

1. **忘れっぽい乗客が 2 人。**最初の 2 人の乗客がともに無作為に席を選ぶとき、最後の乗客が自分の席に座れる確率はいくらか。

2. **席を奪われる乗客。**$n = 3$ の場合について、起こりうる場合を列挙して、席を奪われる乗客の人数の期待値を確かめよ。

3. **遠回りの道。**漸化式を用いて、$\sum_{r=2}^{n-1} P_r = \frac{n-2}{2}$ が対称性による議論と矛盾しないことを示せ。

4. **最後の席。**最後の乗客が自分の席に座れないという条件のもとで、最後の乗客は確率 1 で S_1 に座ることを示せ。それはなぜか。

さらに学ぶために

- **Peter Winkler, *Mathematical Puzzles: A Connoisseur's Collection***（A K Peters）。『数学パズル：愛好家のためのコレクション』。飛行機の座席パズルをはじめ、対称性によって解ける多くのパズルを収録している。
- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability***（Dover）。『確率の 50 の難問』。古典的な問題集である。
- **Joseph Blitzstein & Jessica Hwang, *Introduction to Probability***（CRC Press；オンラインで無料公開）。『確率論入門』。

詳しい解説付きの解答は第 12.5 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/airline-seat.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com